Examen d'analyse - Partie exercices

MATH-F-301

29 mai 2017

Veillez à justifier soigneusement toutes vos affirmations.

Question 1. Soit X un ensemble. Soit $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partition de X, c'est-à-dire une famille de sous-ensembles $E_n \subset X$ tels que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$ et $E_n \cap E_m = \varnothing$ pour tous $n \neq m$.

(a) Montrer que la σ-algèbre engendrée par la famille $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ n'est autre que $\mathcal{A} := \{\bigcup_{n\in J} E_n : J \subset \mathbb{N}\}$.

(b) Caractériser explicitement les fonctions mesurables sur $(X, \mathcal{A})$.

Question 2. Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ l'espace de mesure de Lebesgue, et soit μ une *autre* mesure sigma-finie définie sur la même σ-algèbre de Lebesgue $\mathcal{M}$. On suppose que μ est invariante par translation, c'est-à-dire que $\mu(x + E) = \mu(E)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $E \in \mathcal{M}$.

(a) Montrer que μ coïncide avec la mesure de Lebesgue m à une constante multiplicative près : pour tout $E \in \mathcal{M}$ on a $\mu(E) = \mu([0,1])m(E)$.
(*Indication :* Écrire $\mu(E) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)dy \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(x)d\mu(x)$, appliquer le théorème de Fubini pour écrire une intégrale double sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et jouer avec l'invariance par translation des deux mesures.)

(b) Soit $\sharp$ la mesure qui compte les points, c'est-à-dire telle que pour tout $E \in \mathcal{M}$ la mesure $\sharp(E)$ est le nombre d'éléments de E. Est-il vrai que $\sharp$ est égale à la mesure de Lebesgue m à une constante près ? Est-ce en contradiction avec le point (a) ? Expliquer.

Question 3. Soit $\mathbb{R}^+ := [0, \infty[$ muni de (la restriction de) la mesure de Lebesgue, et soit $1 < p < \infty$. Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$, on définit $Tf(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$ pour tout $x > 0$. Le but de cet exercice est de démontrer les inégalités de Hardy et de Carleman.

(a) Montrer que pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)$ la fonction Tf est bien définie et continue sur $]0, \infty[$.

(b) Montrer que T définit un opérateur linéaire borné sur $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^+)$. Plus précisément, montrer que pour tout $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^+)}.$$

(*Indication :* Pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$, vérifier qu'une intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}^+} |Tf(x)|^p dx = -p\int_{\mathbb{R}^+} x(Tf)'(x)\,\mathrm{sgn}(Tf(x))|Tf(x)|^{p-1}dx,$$

et calculer $(Tf)'$ pour en déduire $(p-1)\int_{\mathbb{R}^+} |Tf|^p \leq p\int_{\mathbb{R}^+} |f||Tf|^{p-1}$.)

(c) Montrer que pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{1}{x}\int_0^x |f|^{1/p}\right)^p dx = \int_{\mathbb{R}^+} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log(|f|)\right) dx,$$

où on utilise la convention $\exp(-\infty) = 0$. En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log(|f|)\right) dx \le e\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^+)}.$$

Question 4. Soit $C([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues $[0,1] \to \mathbb{R}$, que l'on munit du produit scalaire $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$. On fixe $r \ge 0$ et $a \in]0,1[$, et on considère l'application linéaire $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$Tf = \int_0^a x^r f(x)\, dx.$$

(a) Montrer que T est continue et donner la norme de T.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de $h \in C([0,1])$ tel que $Tf = \langle f, h\rangle$ pour tout $f \in C([0,1])$.

(c) Conclure que $C([0,1])$ muni de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ n'est pas un espace de Hilbert.

Question 5. On considère l'application linéaire $T : C_c^\infty(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$T\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x)\, dx.$$

(a) Montrer que T est une distribution tempérée.

(b) Montrer que $\partial_x T + \partial_y T = 0$.

(c) On calcule la transformée de Fourier de T (étendue sur $\mathcal{S}$) en procédant comme suit.

   (i) Justifier que
   $$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon\theta^2}\, \hat{\varphi}(\theta, \theta)\, d\theta.$$

   (ii) En utilisant que pour tout $a > 0$ la transformée de Fourier de la fonction $f_a(x) = e^{-ax^2}$ est donnée par
   $$\hat{f}_a(\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\theta^2}{4a}},$$
   montrer que
   $$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, 2\sqrt{\epsilon}z - x) e^{-z^2}\, dx\, dz.$$

   (iii) Déduire la transformée de Fourier de T.