BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 13

Quelques éléments de théorie ergodique

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ un système dynamique normalisé (i.e. $(X, \mathcal{X}, \mu)$ est un espace de mesure avec $\mu(X) = 1$, et $T : X \to X$ est une application mesurable avec $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$ pour tout $E \in \mathcal{X}$).

1. Théorème de récurrence de Poincaré.

(i) Soit $E \in \mathcal{X}$ de mesure $\mu(E) > 0$. Montrer qu'alors

$$\limsup_{n\uparrow\infty} \mu(E \cap T^{-n}E) \geq \mu(E)^2.$$

En particulier, en déduire que $E \cap T^{-n}E$ a une mesure > 0 (et est donc non vide) pour une infinité de valeurs de n. Que cela signifie-t-il physiquement ? Comparer au second principe de la thermodynamique. (*Hint :* utiliser par exemple l'inégalité de Jensen

$$\left(\int_X \left(\sum_{n=1}^{N} 1_{T^{-n}E}\right) d\mu\right)^2 \leq \int_X \left(\sum_{n=1}^{N} 1_{T^{-n}E}\right)^2 d\mu,$$

et développer les deux membres.)

(ii) Montrer de façon analogue que, pour tout $f \in L^1(\mu)$ avec $f \geq 0$,

$$\limsup_{n\uparrow\infty} \int f \circ T^n \cdot f d\mu \geq \left(\int f d\mu\right)^2.$$

2. Théorème ergodique de von Neumann. Considérons l'espace de Hilbert $H = L^2(X, \mu)$, ainsi que l'opérateur linéaire unitaire $U : H \to H$ défini par $Uf(x) = f(Tx)$. Montrer que, pour tout $f \in H$, nous avons

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n f \to \pi f \qquad \text{dans } H,$$

où $\pi : H \to H$ est la projection orthogonale sur le sous-espace (fermé) H^U des éléments U-invariants. Pour ce faire, on procédera comme suit :

(i) Observer que le sous-espace $W := (U - Id)H$ est orthogonal à H^U, et vérifier le résultat pour tout $f \in H^U$ ainsi que pour tout $f \in W$. En déduire le résultat pour tout $f \in \mathrm{adh}_H(H^U + W)$.

(ii) En raisonnant par l'absurde, montrer que $H^U + W$ est dense dans H, et conclure comme voulu.

3. Ergodicité. La mesure μ est dite ergodique si tout sous-ensemble $G \in \mathcal{X}$ T-invariant (i.e. $\mu(G \Delta T^{-1} G) = 0$) est de mesure $\mu(G) = 1$ ou 0.

(i) Si μ est ergodique, montrer que le résultat de l'exercice précédent devient : pour tout $f \in L^2(X, \mu)$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) \to \int f d\mu \qquad \text{dans } L^2(X, \mu).$$

Le théorème ergodique de Birkhoff affirme que la convergence a en fait lieu aussi presque partout, pour tout $f \in L^1(X, \mu)$.

(ii) Étant donné un sous-ensemble $E \in \mathcal{X}$, calculer le temps moyen de séjour dans E d'une particule soumise à la dynamique, i.e. calculer

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1_E(T^n x).$$

(iii) Notons $k_0(x) = \inf\{k \geq 0 : T^k(x) \in E\}$, et, pour tout $n \geq 0$, notons aussi $k_{n+1}(x) = \inf\{k > k_n(x) : T^k(x) \in E\}$. Considérer alors $R_n(x) = k_{n+1}(x) - k_n(x)$ les durées de récurrence dans E, et calculer la durée moyenne de récurrence dans E en partant de E, i.e. calculer

$$\lim_N 1_E(x) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} R_n(x).$$

À la lumière de ce résultat, finir de commenter l'exercice 1(i) d'un point de vue physique.
(*Hint :* Afin de calculer $\int_E R_0 d\mu$, montrer le lemme de Kac, soit l'égalité $\int_E R_0 d\mu = \mu\{x : R_0(x) < \infty\}$, en observant par exemple

$$\{x : R_0(x) \leq n\} = \{x : R_0(Tx) \leq n - 1\} \cup T^{-1}\{x \in E : R_0(x) \geq n\},$$

où l'union est disjointe ; pour calculer enfin $\mu\{x : R_0(x) < \infty\}$, utiliser l'exercice (ii).)