BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 2

Espaces mesurables

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ une fonction additive sur la σ-algèbre $\mathcal{A}$, c'est-à-dire telle que $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ si A_1, A_2 sont disjoints et dans $\mathcal{A}$.[1] Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) μ est σ-additive sur $\mathcal{A}$;

(ii) lorsque B_n est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n);$$

(iii) lorsque C_n est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

2. Soient Ω un ensemble non dénombrable et $\mathcal{A}$ la famille de tous les sous-ensembles A de Ω tels que A ou A^C soit (au plus) dénombrable. On définit $\mu(A) = 0$ dans le premier cas, $\mu(A) = 1$ dans le second. Montrer que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre et que μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.

3 (Théorème de Borel-Cantelli)**.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure avec $\mu(X) < \infty$. Soit une suite $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$. Définissons

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j.$$

(i) Si $\sum_n \mu[A_n] < \infty$, alors $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

(ii) Si au contraire $\sum_n \mu[A_n] = \infty$ et si les A_n sont indépendants, alors $\mu(\limsup_n A_n) = \mu(X)$.

1. Pour remarque, si $\mathcal{A}$ est une algèbre sur Ω (donc un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ non vide, fermé par complémentations et par unions finies), une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ additive est appelée un *contenu* si en outre $\mu(\varnothing) = 0$.

4. Une σ-algèbre $\mathcal{A}$ est dite *dénombrablement engendrée* s'il existe une famille dénombrable $(A_n)_n$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A} = \sigma((A_n)_n)$. Montrer qu'une sous-$\sigma$-algèbre d'une σ-algèbre dénombrablement engendrée n'est pas forcément dénombrablement engendrée.
Hint : se souvenir que la σ-algèbre borélienne $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}^d$ est dénombrablement engendrée, et considrer alors la σ-algèbre $\mathcal{A}'$ de l'exercice 2 (pour $X = \mathbb{R}^d$).

5. Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ des espaces mesurables. On dit que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ pour tout $B \in \mathcal{A}_2$. Montrer que si $\mathcal{A}_2$ est la σ-algèbre engendrée par une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$, alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ pour tout $B \in \mathcal{F}$.

6. Soit f une fonction réelle sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que si f est telle que $\{x \in \Omega\,;\, f(x) > r\}$ est mesurable pour tout r rationnel, alors f est mesurable.

7. Dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ on considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{si } -\pi < x \leq \pi, \\ 1 & \text{si } 10 < x < 20, \\ 0 & \text{ailleurs}\,; \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que f et g sont mesurables.

8. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus D$, où D est un ensemble dénombrable. Montrer que g est borélienne.