BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 3

L'intégrale de Lebesgue

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour toute fonction $f : \Omega \to [0, \infty]$ mesurable, on pose

$$\int_A f \, d\mu = \sup \left\{ \int_A s \, d\mu \, ; \, s \text{ mesurable et simple, } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Montrer les propriétés suivantes pour f et g mesurables et $A, B \in \mathcal{A}$:

(i) $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu$;

(ii) $A \subset B$ et $f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$;

(iii) $f \geq 0$ et $c \in [0, \infty] \Rightarrow \int_A cf \, d\mu = c \int_A f \, d\mu$;

(iv) $f(x) = 0$, $\forall x \in A \Rightarrow \int_A f \, d\mu = 0$, même si $\mu(A) = \infty$;

(v) $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \, d\mu = 0$, même si $f(x) = \infty$, $\forall x \in A$;

(vi) $f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \, d\mu = \int_\Omega \chi_A f \, d\mu$; en déduire que si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$.

2. Soient $f_n : \Omega \to [0, \infty]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ des fonctions mesurables telles que

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots \geq 0.$$

On définit $f(x)$ comme la limite des $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$, pour chaque $x \in \Omega$. Montrer que, si $f_1 \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Donner ensuite un contre-exemple montrant que la conclusion est erronée si on enlève l'hypothèse $f_1 \in L^1(\mu)$.

3. Supposons $\mu(\Omega) < \infty$. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions complexes mesurables sur Ω et telles que $f_n \to f$ uniformément sur Ω. Montrer que si $f_n \in L^1(\Omega)$ pour tout n, alors

$$f \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Montrer ensuite que l'hypothèse $\mu(\Omega) < \infty$ est nécessaire.

4. Soit $f \in L^1(\mu)$. Montrer que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_A |f| \, d\mu < \epsilon$ si $\mu(A) < \delta$.