BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 6

1. On considère les fonctions

$$f_1(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0, \\ \ln|x| & \text{si } 0 < |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1} & \text{si } |x| \neq 1, \\ 20 & \text{si } |x| = 1, \end{cases}$$

$$f_3(x) \equiv 1.$$

Déterminer si ces fonctions sont intégrables sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par rapport à la mesure m, dans les deux cas suivants :

(i) m est la mesure de Lebesgue ;

(ii) m est définie par

$$m(B) = \sum_{n \in B \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{1+(n+1)^2}$$

pour tout borélien B.

Si possible, calculer les intégrales.

2. Déterminer les limites de

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$$

lorsque $n \to \infty$.

3. Soit f définie sur $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x-1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Montrer que f est mesurable au sens de Lebesgue et que

$$m(f^{-1}(E)) = m(E)$$

pour tout $E \subset [0,1[$ mesurable (ce qui signifie que f est un homomorphisme de l'espace de Lebesgue $[0,1[$). Montrer que f est ergodique, c'est-à-dire que $m(f^{-1}(E)\Delta E) = 0$ implique $m(E) = 0$ ou 1.