BA3 en mathématiques
Exercices d'analyse

Séance 9

1. Soient $1 \leq q < p < \infty$.

(i) Si $\mu(\Omega) < \infty$, montrer que pour tout $u \in L^p(\Omega)$, on a

$$\frac{\|u\|_{L^q}}{\mu(\Omega)^{1/q}} \leq \frac{\|u\|_{L^p}}{\mu(\Omega)^{1/p}},$$

d'où $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ (mais la réciproque est fausse en général).

(ii) Soit A un ensemble dénombrable. Pour tout $1 \leq r < \infty$, rappelons la définition de l'espace de suites $\ell^r(A)$:

$$\ell^r(A) = \left\{ (x_k)_{k\in A} \ : \ \|(x_k)_k\|_{\ell^r(A)} := \left(\sum_{k\in A} |x_k|^r \right)^{1/r} < \infty \right\}.$$

Montrer que, pour tout $(x_k)_k \in \ell^q(A)$,

$$\|(x_k)_k\|_{\ell^p(A)} \leq \|(x_k)_k\|_{\ell^q(A)},$$

d'où $\ell^q(A) \subset \ell^p(A)$ (mais la réciproque est fausse en général).

(iii) Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = \begin{cases} (1/x)^{1/q} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $u \in L^p(\mathbb{R})$ mais que $u \notin L^q(\mathbb{R})$, et ainsi que $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R})$.

(iv) Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(x) = \begin{cases} (1/x)^{1/p} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $v \in L^q(\mathbb{R})$ mais que $v \notin L^p(\mathbb{R})$, et ainsi que $L^p(\mathbb{R}) \not\supset L^q(\mathbb{R})$.

(v) A-t-on $L^q(\mathbb{R}) \supset L^\infty(\mathbb{R})$? Et $L^q(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$?

(vi) A-t-on $\cap_{1\leq r<\infty} L^r(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$? Et si $\mathbb{R}$ est remplacé par un sous-ensemble compact ?

2. Soit $1 \leq p < \infty$. Construire une fonction mesurable f sur $\mathbb{R}$ telle que $f \in L^p(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \neq p$.

3. Soit (Ω, μ) un espace de mesure. Montrer que $p \mapsto \| \cdot \|_p^p$ est log-convexe, i.e. pour tous $1 \leq p, q < \infty$ et toute fonction mesurable u sur Ω, nous avons, pour tout $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\|u\|_{L^{\theta p+(1-\theta)q}}^{\theta p+(1-\theta)q} \leq \|u\|_{L^p}^{\theta p} \|u\|_{L^q}^{(1-\theta)q}.$$

En déduire que, pour tout $p \leq q$, on a $\cap_{r\in[p,q]} L^r(\Omega) = L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. En particulier, si u est mesurable sur Ω, l'ensemble des p tels que $u \in L^p$ est convexe (donc un intervalle). En observant les exercices précédents, déduire que n'importe quel sous-ensemble convexe de $[1, \infty]$ peut s'obtenir ainsi.

4. Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$.

(i) Soit S^{n-1} la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\varphi : x \to (r, u)$ avec $r = |x|$ et $u = x/|x|$ est une bijection entre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $]0, \infty[\times S^{n-1}$.

(ii) Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'on peut définir une mesure σ sur S^{n-1} de la manière suivante : si $A \subset S^{n-1}$ est un borélien, on pose $\tilde{A} = \varphi^{-1}(]0, 1[\times A)$ et ensuite $\sigma(A) = nm(\tilde{A})$.

(iii) Pour $f \geq 0$ borélienne, montrer la formule

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, dm = \int_0^\infty r^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} f(ru)\, d\sigma(u) \right) dr$$

en procédant de la façon suivante :

(a) montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{S}_N = \{\varphi^{-1}(]a, b] \times A)\,;\, 0 \leq a \leq b \leq N \text{ et } A \text{ borélien}\}$$

est une semi-algèbre sur $\varphi^{-1}(]0, N] \times S^{n-1})$;

(b) vérifier la formule pour $f = \mathbf{1}_E$, avec $E \in \mathcal{S}_N$;

(c) en déduire que la formule est vraie si $f = \mathbf{1}_B$, pour tout borélien B ;

(d) généraliser à $f \geq 0$ simple et borélienne, puis à $f \geq 0$ borélienne.

(iv) Montrer que $f(x) = (1+|x|^2)^{-m/2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $g(x) = (1 + |x|)^{-m} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $m > n$.