UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

# II - 13
# Flexion plastique

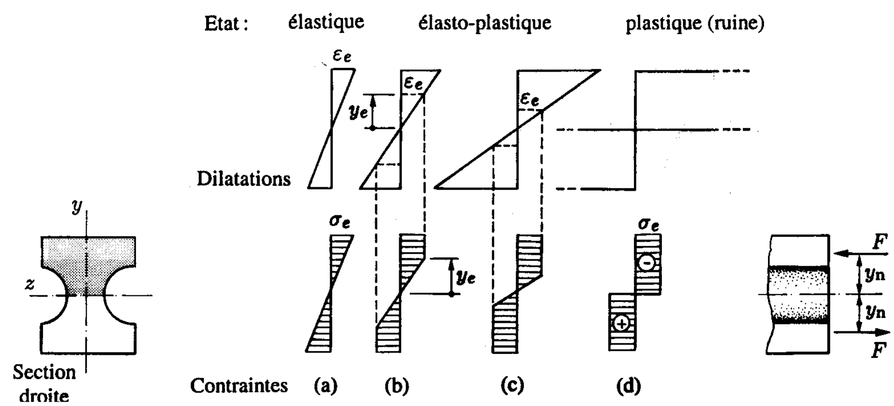
Philippe.Bouillard@ulb.ac.be

version 18 juillet 2011

## Flexion plastique plane

- matériau élastique parfaitement plastique
  - critères de dimensionnement
  - moment plastique
  - rotule plastique
- hypothèses
  - pas influence de N et T, M constant
  - Bernoulli

# Sections doublement symétriques




[Frey, 2000, Vol. 2]





# Dimensionnement élastique

- $M \leq M_e$ (rappel)
  - moment élastique maximal

$$M_e = \frac{I_z}{y_{max}} \sigma_e$$

  - courbure élastique maximale

$$\frac{1}{R_y} = \psi_e = -\frac{M_e}{EI_z}$$

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

## Dimensionnement élastoplastique

- Me ≤ M ≤ Mpl
  - les fibres supérieures et inférieures plastifient simultanément
  - équation d'équilibre de translation (N = 0)

$$\int_A \sigma dA = 0$$

  - $\Rightarrow$ l'axe neutre est donc toujours au centre de gravité
  - la distance ye (voir figure) est donné par

$$y_e = \frac{\varepsilon_e}{\psi}$$



UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

## Charge ultime

- le moment ultime est donné par

$$\begin{aligned} M_{pl} &= \int_A \sigma y dA \\ &= \sigma_e \int_A |y| dA \\ &= 2\sigma_e \int_{A/2} |y| dA \\ &= 2S(A/2)\sigma_e \end{aligned}$$

moment statique de la demi-section

Z module plastique ($m^3$)

# Gain dû à la plasticité dans la section

- Section rectangulaire largeur b, hauteur h
  - module de résistance élastique

$$\frac{I_z}{y_{max}} = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow M_e = \frac{bh^2}{6}\sigma_e$$

  - module de résistance plastique

$$S(A/2) = b\frac{h}{2}\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} \Rightarrow M_{pl} = \frac{bh^2}{4}\sigma_e$$

  - gain (facteur de forme)

$$\varphi = \frac{M_{pl}}{M_e} = 1.5$$





# Flexion plastique plane : profil idéal

- on dispose de 3 critères
  - rendement élastique (rappel)

$$\eta_e = \frac{I / y_{sup/inf}}{\left(I / y_{sup/inf}\right)_{th}}$$

  - rendement plastique

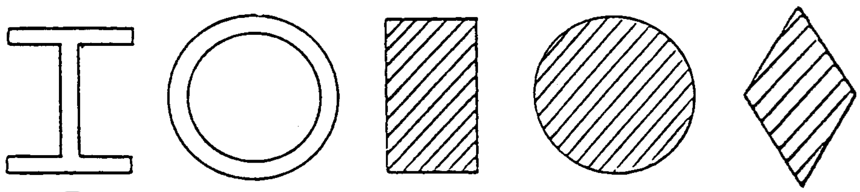
$$\eta_{pl} = \frac{M_{pl}}{M_{pl\,th}} = \frac{Z}{Z_{th}}$$

  - facteur de forme

$$\varphi = \frac{M_{pl}}{M_e}$$

    - mesure la réserve de résistance en flexion

# Flexion plastique plane : profil idéal



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\eta_e=2/3$ | $\eta_e\approx1/2$ | $\eta_e=1/3$ | $\eta_e=1/4$ | $\eta_e=1/6$ |
| $\eta_{pl}\approx0.76$ | $\eta_{pl}\approx0.64$ | $\eta_{pl}=0.5$ | $\eta_{pl}\approx0.42$ | $\eta_{pl}=0.33$ |
| $\varphi=1.15$ | $\varphi=1.27$ | $\varphi=1.5$ | $\varphi=1.7$ | $\varphi=2$ |

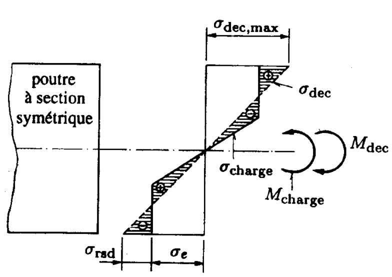
$\varphi$ n'est pas le seul critère !





# Déchargement

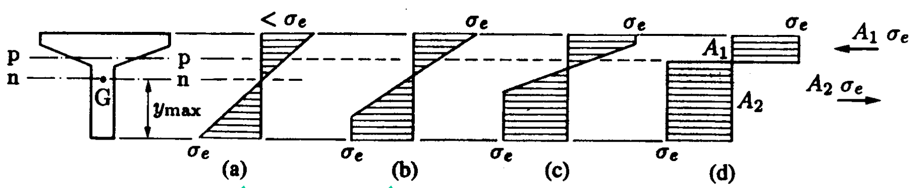
- partons de Me ≤ M ≤ Mpl
  - lors d 'un déchargement, il subsiste une courbure permanente et des contraintes résiduelles




$$\sigma_{rsd} = \pm\left(\sigma_e - \frac{M}{I/y_{max}}\right)$$

[Frey, 2000, Vol. 2]

# Sections à un seul axe de symétrie




élastique élasto-plastique plastique

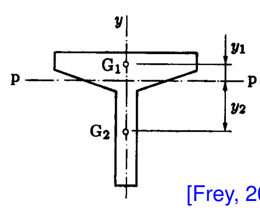
la position de l'axe neutre est donné par

$$\int_A \sigma dA = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_e\left(A_2 - A_1\right) = 0$$





# Axe neutre plastique




[Frey, 2000, Vol. 2]

Axe neutre plastique (p-p) d'une section à un seul axe de symétrie.

– l'axe neutre plastique divise la section en 2 aires égales
– le moment plastique est donné directement par

$$Z = \frac{A}{2}\left(y_1 + y_2\right)$$

# Pièces composées

- l'axe neutre se détermine par l'équation

$$\int_A \sigma dA = 0$$

souvent résolue par tâtonnements

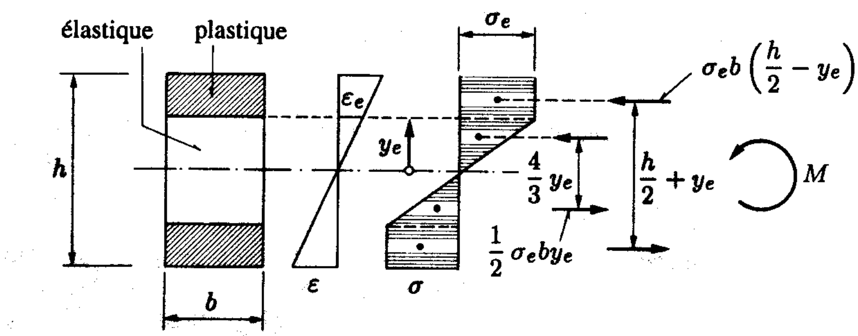


# Loi moment-courbure

- relation à chaque instant entre moment et courbure
- on préfère un diagramme non dimensionnel
  - M/Me en fonction de ψ/ψe

$$M_e = \frac{I_z}{y_{max}} \sigma_e \qquad \psi_e = -\frac{M_e}{EI_z}$$

## Section rectangulaire




[Frey, 2000, Vol. 2]



## Etat élastique

- $M \leq M_e$
  - courbure élastique

$$\psi = -\frac{M}{EI_z}$$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{-EI_z\psi}{-EI_z\psi_e}$$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{\psi}{\psi_e}$$

# Etat élastoplastique

- Me ≤ M ≤ Mpl
  - le moment élastoplastique peut être calculé aisément par calcul des résultantes et bras de levier (voir figure)

$$M = \sigma_e b\left(\frac{h}{2} - y_e\right)\left(\frac{h}{2} + y_e\right) + \frac{1}{2}\sigma_e b y_e \frac{4}{3} y_e \qquad M = \sigma_e \frac{bh^2}{4}\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{y_e}{h}\right)^2\right)$$

$$M = \sigma_e b\left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_e^2}{3}\right) \qquad M = M_{pl}\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{y_e}{h}\right)^2\right)$$



# Etat élastoplastique

- Or, à l'état élastique (Bernoulli)

$$y_e = \frac{\varepsilon_e}{\psi} \text{ avec } \varepsilon_e = \psi_e \frac{h}{2} \text{ lorsque } M = M_e$$

$$\Rightarrow y_e = \frac{\psi_e}{\psi}\frac{h}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_{pl}}{M_e}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\psi_e}{\psi}\right)^2\right)$$

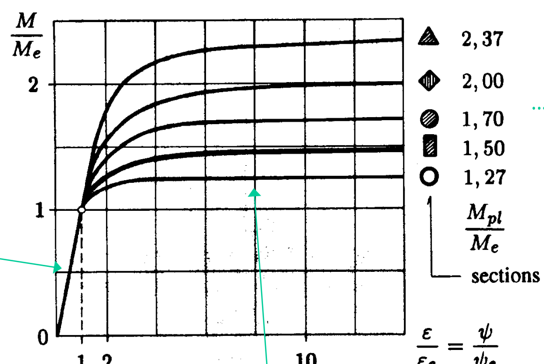
# Etat plastique

$$\frac{\psi_e}{\psi} \to \infty$$

$$\frac{M}{M_e} \to \frac{M_{pl}}{M_e} = 1.5$$



# Lois moment-courbure pour sections droites




élastique

∞

plastique

[Frey, 2000, Vol. 2]

[Frey, 2000, Vol. 2]

élastoplastique

# Flexion plastique plane

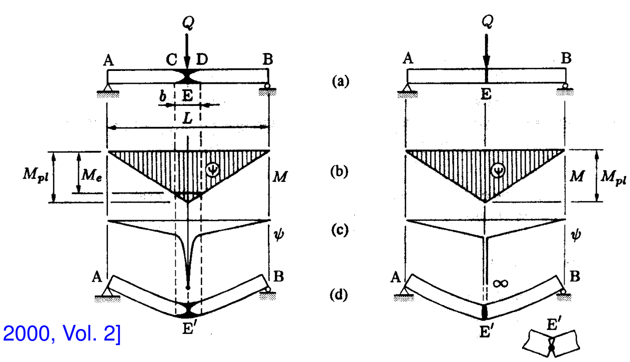
- notion de rotule plastique
  - courbe moment-courbure
    - la poutre a un comportement élastique parfaitement plastique : elle reste élastique jusqu'à l'instant où le moment plastique Mpl est atteint, puis elle fléchit plastiquement à moment constant.
  - pas de plastification due à T ou à N
  - localisation des déformations (de la courbure)





UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

# Rotule plastique

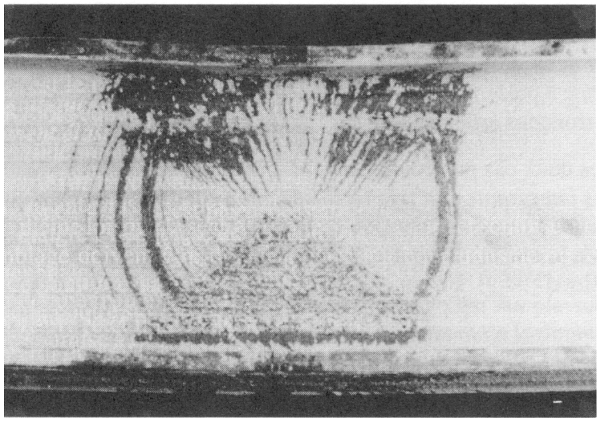



[Frey, 2000, Vol. 2]

| réel | modèle simplifié |
|---|---|
| localisation de courbure dans CD | localisation de courbure en E |
| AC et DB restent élastiques | poutre quasi-articulée en E ' |

ULB BATir

# Rotule plastique



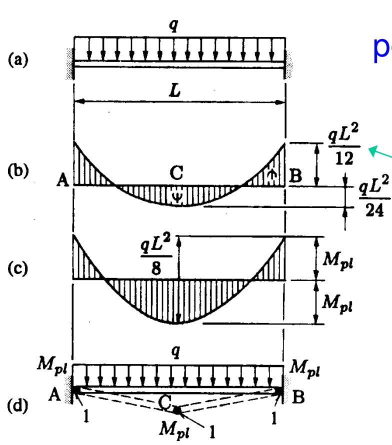
rotule est un terme abusif car la rotation n'est pas libre

[Frey, 2000, Vol. 2]



UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

# Charge limite des structures hyperstatiques




[Frey, 2000, Vol. 2]

poutre bi-encastrée 3x hyperstatique

charge totale : Q = qL

moment **élastique** maximal

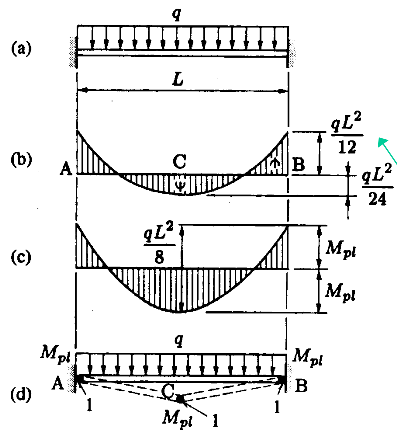
$$M_{max} = M_A = M_B = \frac{q_e L^2}{12}$$

charge limite élastique

$$Q_e = 12\frac{M_e}{L}$$

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

# Charge limite des structures hyperstatiques




[Frey, 2000, Vol. 2]

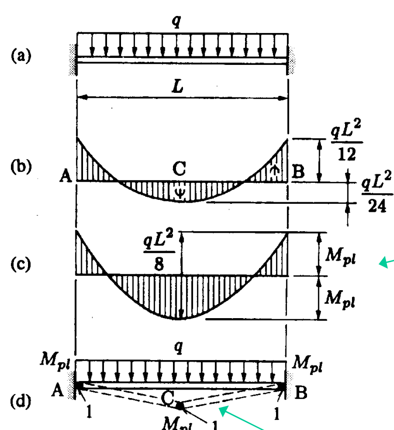
les moments d'encastrement provoquent l'apparition de deux rotules plastiques : la poutre est isostatique. Les moments d'encastrement valent donc au maximum

$$M_{max} = M_A = M_B = \frac{q_{2r} L^2}{12}$$



UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, UNIVERSITÉ D'EUROPE

# Charge limite des structures hyperstatiques




si on continue à augmenter q, il apparaît une troisième rotule plastique. La poutre est isostatique et on a

$$\frac{q_{3r} L^2}{8} = 2M_{pl}$$

charge limite plastique

$$Q_{pl} = 16 \frac{M_{pl}}{L}$$

mécanisme de ruine

# Gain dû à l'hyperstaticité

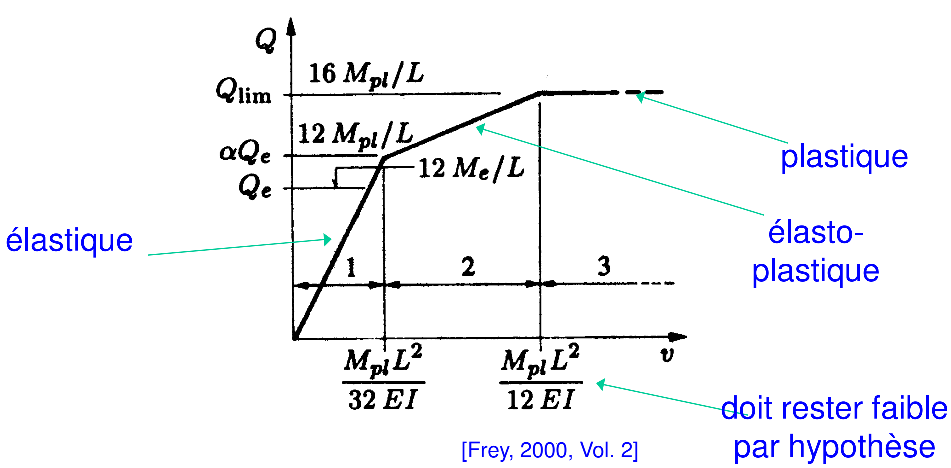
- réserve de résistance des structures hyperstatiques

$$\frac{Q_{pl}}{Q_e} = \frac{16}{12}\frac{M_{pl}}{M_e} = \frac{4}{3}\varphi$$

gain dû à la redistribution entre les sections



# Courbe charge-flèche




[Frey, 2000, Vol. 2]