

Introduction

*Une personne qui n'a jamais commis d'erreurs
n'a jamais tenté d'innover.*

(A. Einstein)

1.1 Motivation

L'exposition au bruit est un problème environnemental majeur du début de ce siècle et est ressentie aujourd'hui véritablement comme une source de pollution. Au contraire des autres problèmes environnementaux, la pollution due au bruit est en pleine croissance (rapport OCDE, 1996). Le bruit est également le seul impact environnemental pour lequel les plaintes de citoyens sont en augmentation depuis 1992 (European Report No. 2173, November 9, 1996). L'industrie du transport est évidemment concernée au premier chef par ces normes. Dans les zones résidentielles par exemple, le trafic est bien souvent la source dominante du bruit. Dans ce cas, le bruit est intimement lié aux vibrations des structures.

Du point de vue industriel, en outre, la conception acoustique est également devenue un enjeu commercial. Cette dimension, longtemps ignorée dans les contraintes de conception des véhicules et des appareils (au sens large), se retrouve aujourd'hui souvent dans les dossiers d'appel d'offres, y compris dans ceux des sous-traitants ne maîtrisant qu'une partie du projet.

Le contrôle du bruit implique la mise en œuvre de deux outils essentiels : la prédiction du bruit et son atténuation. Ces deux outils sont complémentaires car pour aboutir à un contrôle efficace, soit par réduction des vibrations (amortissement structural, ...) soit par absorption du bruit, il est indispensable de disposer de méthodes de prédiction du bruit et des vibrations **efficaces, précises et peu coûteuses**.

La simulation de la propagation d'ondes requiert l'utilisation de méthodes numériques appropriées. Actuellement, les outils utilisés industriellement reposent, à basses fréquences, sur des formulations déterministes (éléments finis FEM, éléments de frontière BEM) et à hautes fréquences, sur des méthodes énergétiques ou de rayon (analyse statistique d'énergie SEA).

La méthode des éléments finis disponible industriellement est une implantation standard des éléments lagrangiens [ZIE00a] éventuellement couplée, pour les problèmes en semi-espaces infinis, à des éléments infinis conjugués ou non [AST94]. De nombreuses versions commerciales de cette méthode sont disponibles (RAYON, SYSNOISE, COMET, ACTRAN, etc.). Les méthodes d'éléments finis nécessitent une discrétisation du domaine fluide, généralement tridimensionnel, dans lequel se propagent les ondes acoustiques. Dans ce type d'approche, la

génération du maillage représente, encore aujourd'hui, une étape onéreuse du processus de simulation.

La méthode des éléments de frontière, telle qu'elle est implantée dans plusieurs codes commerciaux (RAYON, SYSNOISE, COMET, BEASY) est aujourd'hui largement utilisée par les bureaux d'études malgré son coût informatique considérable. Cette méthode conduit en effet à des systèmes d'équations dont les matrices sont pleines, complexes, non symétriques, souvent mal conditionnées et dont la factorisation est extrêmement coûteuse. Malgré cet inconvénient, la méthode BEM est souvent préférée à la méthode des éléments finis car elle est basée sur une formulation du problème sous la forme d'une intégrale de frontière, seule la surface rayonnante devant être discrétisée. Cet avantage de la méthode BEM a longtemps justifié son utilisation quasiment exclusive malgré son coût informatique considérable.

Confrontés à la nécessité de résoudre des problèmes acoustiques à des fréquences de plus en plus élevées¹ et à la croissance quasiment exponentielle du temps de calcul avec la fréquence, les utilisateurs de ces outils de simulation sont aujourd'hui devant une impasse : les méthodes d'éléments de frontière deviennent inutilisables (on parle de plusieurs jours de temps de calcul pour l'étude du rayonnement acoustique d'un moteur de voiture) alors que les méthodes d'éléments finis, plus efficaces en termes de résolution, demandent la génération d'un maillage du volume de fluide qui nécessite plusieurs semaines de travail pour un ingénieur expérimenté. En dépit d'efforts considérables pour étendre le champ d'application de ces méthodes (ou des méthodes de type énergétiques - SEA), aucune formulation ne semble permettre de couvrir la gamme des moyennes fréquences de manière totalement satisfaisante pour l'instant.

Au problème de la croissance du temps de calcul s'ajoute celui de la détérioration de la qualité de la solution numérique lorsque la fréquence augmente. De nombreuses recherches ont en effet montré [HAR91, IHL95a, BOU99] que les solutions numériques de problèmes de propagation d'ondes présentent un phénomène spécifique appelé **dispersion** (numérique) : la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu discrétisé est différente de la vitesse dans le milieu continu.

Il existe donc un besoin industriel réel de développer des méthodes numériques qui combinent les avantages de la méthode des éléments finis (formulation classique de Galerkin pour exploiter les compétences déjà acquises par les ingénieurs en bureaux d'études, systèmes d'équations linéaires symétriques pouvant être résolus par des algorithmes performants, outils de CAO disponibles) et celles des éléments de frontière (pas de maillage du domaine fluide), tout en corrigeant les problèmes numériques communs aux deux méthodes (dispersion). Parmi les exemples de calculs menés actuellement, au moins partiellement, avec les méthodes classiques (éléments finis, éléments de frontière) et qui pourraient bénéficier de calculs fiables en moyennes fréquences, on peut citer :

- *l'industrie automobile* : conception du compartiment passager, étude du groupe motopropulseur (dont les collecteurs d'admission), systèmes d'échappement, pneumatiques,

¹ La gamme des fréquences audibles par une oreille humaine est estimée à [20-20k] (Hz). Cette gamme correspond bien souvent, mais cela dépend des applications et du contenu modal, à ce qui est habituellement appelé les « moyennes fréquences ».

- *l'industrie aéronautique* : bruit dans les avions et les hélicoptères, bruit de réacteur et de turbopropulseur, sollicitation acoustique de structures spatiales,
- *l'industrie du transport terrestre* : bus, trains, camions, tracteurs,
- *la haute-fidélité* : conception de microphones, de haut-parleurs, de systèmes de téléphonie,
- *l'acoustique sous-marine* : conception de systèmes de sonar, détermination d'écho de cibles, nettoyage ultrasonore,
- *le génie naval* : comportement dynamique et rayonnement sous-marin des structures immergées,
- *les compresseurs*,
- *les installations industrielles* (prise de conscience des nuisances sonores),
- *les écrans antibruit* (pollution sonore).

Beaucoup de méthodes numériques ont été proposées pour améliorer les méthodes existantes et pour éliminer la dispersion, sans y parvenir dans un cadre tout à fait général. Dans le cas particulier des éléments finis, la première idée qui est apparue consistait à stabiliser numériquement la solution. L'utilisation des méthodes polynomiales d'ordre élevé a ensuite été proposée (les versions *hp* de la méthode des éléments finis ou certaines formulations sans maillage). Aujourd'hui, il semble néanmoins acquis que l'on a tout intérêt à développer des méthodes numériques dont les sous-espaces de discrétisation contiennent une information locale sur la solution. C'est le cas des méthodes de Galerkin discontinues, des méthodes Trefftz, de la théorie variationnelle des rayons complexes, ou de certaines méthodes sans maillages. Avant de décrire l'état de l'art de cette question (paragraphe 1.4), les paragraphes 1.2 et 1.3 rappellent les formulations continues et discrètes de la vibro-acoustique et introduisent les notions d'erreur de dispersion et de pollution essentielles à ce travail.

1.2 Formulations continues de la vibro-acoustique

1.2.1 Vibro-acoustique couplée

Considérons un domaine solide Ω_s couplé à un domaine fluide Ω_f le long d'une interface Γ (Figure 1-1). Dans le domaine solide, on suppose que les déplacements u_i sont de petites perturbations autour d'un état d'équilibre. Les forces de volume sont en général considérées négligeables. L'amortissement structural est pris en compte par la loi constitutive. Dans le domaine fluide, l'onde acoustique est supposée harmonique autour d'une ambiance au repos en l'absence de forces de volume (acoustique linéaire). Moyennant ces hypothèses simplificatrices, les équations générales de la vibro-acoustique sont :

$$\sigma_{ij,j}(u) + \rho_s \omega^2 u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (1.1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.2)$$

$$\sigma_{ij}(u) n_j = \bar{F}_i \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ij}(u) n_j = -pn_i \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f \omega^2 u_i n_i \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.5)$$

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1.6)$$

où ρ_s et ρ_f représentent la masse volumique du solide et du fluide et $k=\omega/c$ le nombre d'onde. L'équation (1.1) est l'équation d'équilibre élastodynamique, associée aux conditions aux limites cinématiques (1.2) sur Γ_D (conditions de Dirichlet) et statiques (1.3) sur Γ_N (conditions de Neumann). L'équation (1.4) représente l'action des forces de pression du fluide sur le solide le long de l'interface Γ . L'équation (1.5) représente l'excitation du fluide par les vibrations structurales. Si les vitesses structurales sont données, le problème est dit faiblement couplé et l'équation (1.5) se réduit à un condition de Neumann sur le fluide (paragraphe 1.2.2). Enfin, l'équation (1.6) est l'équation d'Helmholtz décrivant la propagation de l'onde de pression acoustique p . Une présentation assez complète de la problématique plus générale de l'interaction fluide-structure peut être trouvée dans [MOR95].

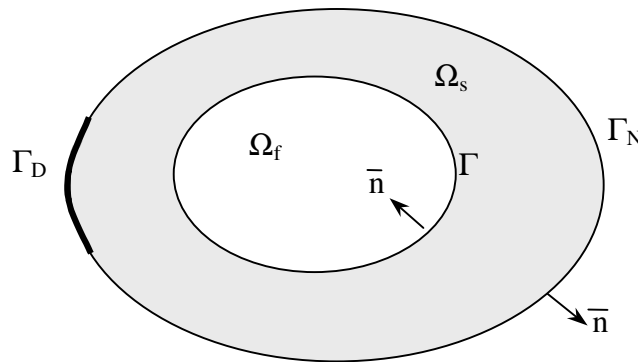


Figure 1-1: Un domaine solide Ω_s en vibration est couplé au domaine fluide Ω_f dans lequel se propage l'onde acoustique

1.2.2 Vibro-acoustique faiblement couplée

Dans le cas particulier de l'acoustique faiblement couplée où le comportement structural est représenté directement par des conditions aux limites sur le fluide, le problème général de la vibro-acoustique (1.1-6) peut s'exprimer sous la forme :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1.7)$$

$$p = \bar{p} \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.8)$$

$$\mathbf{n}^t \nabla p = -j \rho_f c k \bar{v}_n \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (1.9)$$

$$\mathbf{n}^t \nabla p = -j \rho_f c k A_n p \quad \text{sur } \Gamma_R \quad (1.10)$$

où la frontière est décomposée en conditions aux limites de Dirichlet (pression imposée), de Neumann (vitesse normale imposée \bar{v}_n correspondant aux accélérations structurales) et de Robin (lien entre pression et vitesse normale introduisant le coefficient d'admittance A_n modélisant l'amortissement structural).

1.3 Méthodes classiques de discrétisation

1.3.1 Forme discrétisée

Sous forme discrétisée, le problème général de la vibro-acoustique (1.1) s'écrit pour toute méthode de discrétisation de type Galerkin (FEM, sans maillage, ...) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s + j\omega\mathbf{C}_s - \omega^2\mathbf{M}_s & \mathbf{K}_{sf} \\ \mathbf{K}_{fs} & \mathbf{K}_f + j\omega\mathbf{C}_f - \omega^2\mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

où \mathbf{K}_s , \mathbf{C}_s et \mathbf{M}_s sont les matrices de rigidité, d'amortissement et de masse structurales; \mathbf{K}_f , \mathbf{C}_f et \mathbf{M}_f sont les matrices de « rigidité », d'amortissement et de « masse » acoustiques ; \mathbf{K}_{sf} et \mathbf{K}_{fs} sont les matrices de couplage. Cette formulation n'est pas symétrique mais peut être rendue symétrique [MOR95]. Dans le cas faiblement couplé, les matrices \mathbf{K}_{sf} et \mathbf{K}_{fs} sont nulles mais le vecteur \mathbf{f} , contenant les vitesses acoustiques sur le bord (équation 1.9), dépend du vecteur \mathbf{p} .

1.3.2 Erreur de dispersion et erreur de pollution

Pour introduire les notions d'erreur de dispersion et d'erreur de pollution, on considère la partie réelle du champ de pression d'un problème unidimensionnel discrétisé par des éléments finis linéaires. F. Ihlenburg *et al.* [IHL95a] ont démontré l'estimation *a priori* suivante

$$e_h \leq C_1 kh + C_2 L k^3 h^2, \quad kh < 1 \quad (1.12)$$

où e_h représente l'erreur de discrétisation en semi-norme H^1 (norme sur le gradient uniquement), L est une dimension géométrique caractéristique et les constantes C_1 et C_2 sont indépendantes de k et h . Le premier terme de l'équation (1.12) représente l'erreur locale et le second représente l'erreur de pollution. L'erreur locale est l'erreur d'approximation entre la solution exacte et l'interpolant. Pour avoir une erreur locale constante, il suffit de garder kh constant. Une règle de bonne pratique consiste donc à discrétiser une longueur d'onde par un certain nombre d'éléments, par exemple 6 à 10 éléments linéaires. Cette règle est toujours en vigueur dans le monde industriel qui y voit une application du théorème d'échantillonnage de Shannon. Cependant, l'équation (1.12) montre que l'erreur est dominée (lorsque $k > 1$) par l'erreur de pollution qui n'est pas contrôlée par cette règle de bonne pratique. Pour contrôler l'erreur de pollution, il faudrait garder le terme $k^3 h^2$ constant, ce qui conduirait à des maillages beaucoup plus raffinés que ceux que l'on peut raisonnablement traiter aujourd'hui. L'erreur de pollution est principalement due à l'erreur de dispersion (figure 1-2) où l'on voit que tout se passe comme si l'onde acoustique se propageait à une vitesse du son différente dans le milieu discret, que l'on qualifie donc de dispersif.

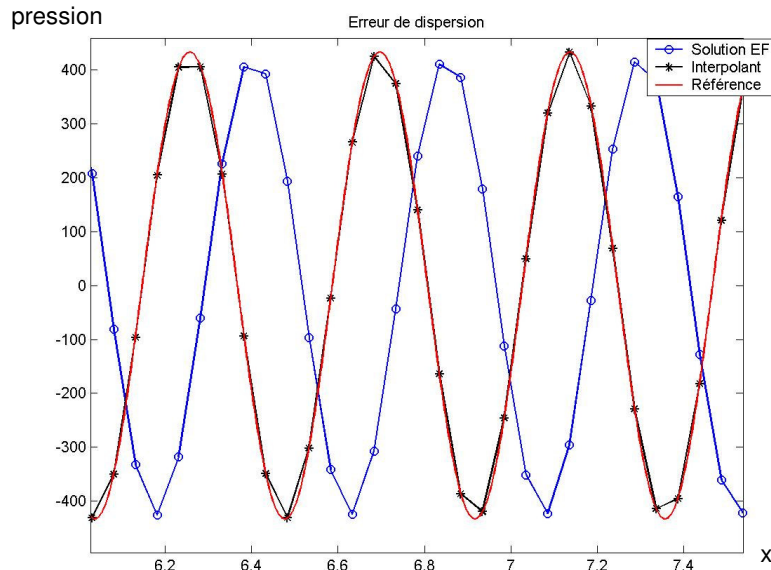


Figure 1-2: Partie réelle de la pression le long d'un tube.
Solutions analytique (Référence), interpolante et éléments finis.
Le nombre d'onde discret k^h est différent du nombre d'onde exact k .
Tout se passe comme si l'onde acoustique se propageait à une vitesse de son différente dans le milieu discret, que l'on qualifie donc de dispersif.

Une manière très classique de mesurer l'erreur de dispersion uniquement $e(\theta)$, c'est-à-dire l'erreur sur le nombre d'onde, lorsque l'on considère une onde plane se propageant le long d'une direction faisant un angle θ avec l'axe x , consiste à calculer

$$e(\theta) = \frac{|k^h - k|}{k} \quad (1.13)$$

où k est le nombre d'onde analytique et k^h le nombre d'onde de la solution discrète.

Au contraire de l'erreur locale, l'erreur de dispersion (et donc l'erreur de pollution) a un caractère global. Aucun estimateur d'erreur *a posteriori* basés sur des méthodes locales ne peut évaluer l'erreur de pollution. Les estimateurs sont donc condamnés à sous-estimer l'erreur de discrétisation [BAB97a, BOU99]. À notre connaissance, il n'existe toujours aucun estimateur d'erreur réellement fiable pour les problèmes de propagation d'ondes.

1.4 Méthodes alternatives

Le présent paragraphe présente les méthodes alternatives proposées dans la littérature. Bien qu'une classification de celles-ci garde toujours un caractère un peu arbitraire, nous envisageons une classification en trois catégories : (1.4.1) les méthodes de stabilisation ; (1.4.2) les méthodes d'ordre élevé, c'est-à-dire celles où le sous-espace de discrétisation contient des termes d'ordre élevé ; (1.4.3) les méthodes permettant la sélection de sous-espaces prédéfinis soit par incorporation d'une information sur la solution analytique du problème homogène connue a priori, soit par incorporation d'une information préalablement calculée.

1.4.1 Les méthodes de stabilisation

Plusieurs méthodes dérivées de la méthode des éléments finis classiques ont été proposées pour réduire la dispersion. La première idée, transposée de la mécanique des fluides, consiste à stabiliser la solution numérique. Trois méthodes relèvent de cette catégorie. La première est la méthode des moindres carrés généralisés (GLS - Generalised Least-Squares) [HAR92, HAR01]. La méthode des éléments finis quasi stabilisée (QSFEM - Quasi-Stabilised Finite Element Method) [BAB95], consiste en l'optimisation des coefficients de la matrice du système sur la base de différentes grilles d'éléments. Cette méthode QSFEM n'est toutefois pas adaptée aux maillages non uniformes ni aux conditions aux limites non régulières. La méthode sans résidu enfin (RFFEM – Residual-Free Finite Element Method) [FRA97], consiste à ajouter une fonction bulle au niveau élémentaire qui satisfait exactement à l'équation de Helmholtz. Cette solution est une somme infinie de termes qui doit bien sûr être tronquée. Une analyse de dispersion de ces méthodes est donnée au paragraphe suivant.

1.4.2 Méthodes d'ordre élevé

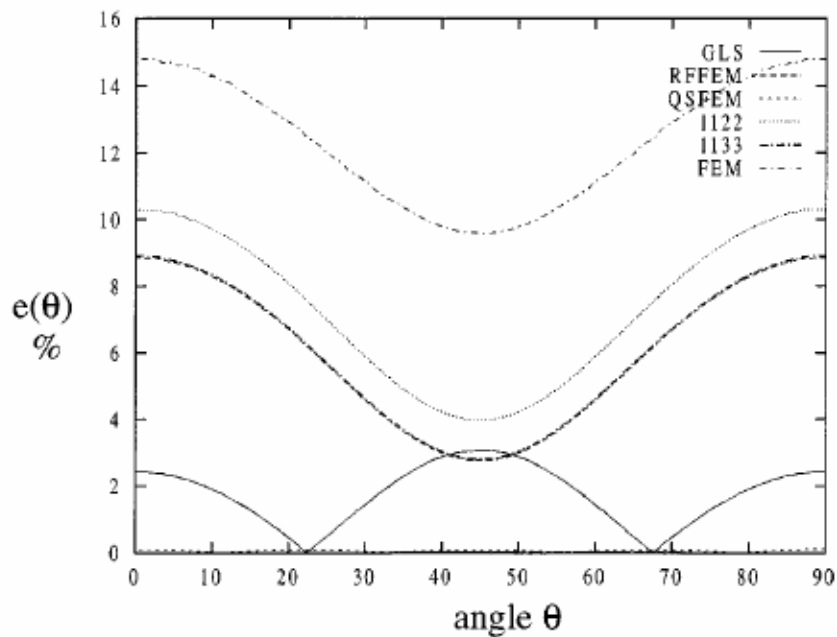


Figure 1-3: Erreur de dispersion $e(\theta)$ en fonction de l'angle de propagation θ pour une onde plane se propageant dans une cavité carrée [DER99].
La méthode QSFEM donne clairement la solution la plus précise mais est restreinte aux maillages réguliers d'éléments carrés.

Pendant très longtemps, les versions-p de la méthode des éléments finis n'étaient pas très populaires car elles conduisaient rapidement à des matrices de système mal conditionnées. Les versions récentes, basées sur des polynômes hiérarchiques, ont toutefois résolu ces inconvénients et des logiciels commerciaux sont aujourd'hui basés sur des méthodes des éléments finis hp [GER96]. Dans le but de comparer cette approche aux méthodes stabilisées citées ci-dessus et d'analyser leurs propriétés de dispersion, considérons uniquement des maillages réguliers d'éléments carrés définis comme suit : une fonction bilinéaire est associée à chaque nœud coin, des bulles de degré p_1 , p_2 , p_3 , et p_4 peuvent être ajoutées aux nœuds côtés

et une fonction bulle de degré p_5 peut être ajoutée au nœud centre de l'élément. Pour p_5 , il est évidemment nécessaire de préciser le degré dans les directions x (p_{5x}) et y (p_{5y}). Un élément hp est donc décrit par les paramètres p_1 ($=p_3$), p_2 ($=p_4$), p_{5x} et p_{5y} soit ' $p_1 p_2 p_{5x} p_{5y}$ '.

La figure 1-3 montre que la méthode la plus dispersive est évidemment la méthode des éléments finis avec des fonctions bilinéaires. L'élément hp 1122 vient ensuite. Ensuite, l'élément 1133 et la méthode RFFEM présentent des résultats sensiblement identiques. Cela signifie qu'ajouter des fonctions bulles de degré 3 est équivalent à une méthode RFFEM, qui requiert, rappelons-le, le calcul d'une fonction bulle analytique par un développement en série. Ensuite, vient la méthode GLS dont l'erreur maximale est plus petite que pour les précédentes, mais elle peut être plus mauvaise pour d'autres directions. La méthode la moins dispersive est incontestablement la méthode QSFEM (dont l'erreur – figure 1-3 – est quasiment nulle).

Une autre manière très naturelle de formuler des méthodes d'ordre élevé, offrant l'avantage d'offrir des ordres de continuité arbitraire, existe aujourd'hui dans la famille des méthodes sans maillage. Une application de la méthode de Galerkin sans élément (EFGM - Element-free Galerkin method), initialement proposée par T. Belytschko [BEL94] sur la base de la méthode des éléments diffus antérieure [NAY92], a été proposée pour l'acoustique dans [BOU98] et est décrite au chapitre 2. Dans cette approche, nous tirons profit du caractère non rationnel des fonctions d'interpolation. Une analyse de dispersion (Chapitre 2 [SUL00]) montre que la méthode EFGM standard (avec base linéaire) offre déjà de meilleurs résultats que les méthodes GLS et RFFEM. Cette méthode peut encore être améliorée en enrichissant la base du sous-espace de discrétisation par des termes dépendants de kh . Dans ce cas, la méthode EFGM se comporte comme la méthode QSFEM, tout en n'étant pas restreinte aux maillages réguliers. Ces résultats encourageants ne permettent toutefois pas d'atteindre les moyennes fréquences [BOU98].

Il est également possible de formuler une version- p qui intègre un ensemble de fonctions trigonométriques. N.S. Bardell *et al.* [BAR97] ont réalisé une implantation d'une telle approche pour analyser des plaques composites. Une étude des blocages numériques courants pour les plaques et les coques (membrane, cisaillement transversal) pour la version- p de la méthode des éléments finis est donnée dans [COT01].

1.4.3 Sous-espace d'approximation prédéfini

Très rapidement toutefois, l'idée d'incorporer dans le sous-espace de discrétisation une information locale sur la solution a émergé. Pour les problèmes unidimensionnels, l'incorporation des fonctions trigonométriques $\sin(kx)$ et $\cos(kx)$ conduit pour toutes les formulations à la solution exacte. Pour les espaces de dimension supérieure, ce n'est plus le cas mais plusieurs tentatives ont été proposées pour exploiter cette idée. Deux approches peuvent être proposées : incorporer dans la base un ensemble de fonctions harmoniques correspondant à plusieurs angles de propagation, ou pré-calculer localement une première solution qui est ensuite exploitée pour définir la base du sous-espace de discrétisation. Ces approches sont résumées ci-après.

Chadwick, Bettess *et al.* [CHA97, CHA99] utilisent une méthode des éléments finis standard, étendue plus tard aux éléments infinis, pour proposer une nouvelle formulation appropriée aux ondes courtes (short waves). Au départ, les auteurs proposent d'incorporer des fonctions

harmoniques pour la résolution d'un problème acoustique formulé en un potentiel. L'intégration numérique pour une telle approche semble avoir été un obstacle majeur car les auteurs ont proposé plus tard [CHA97] d'appliquer la même méthode à une formulation en amplitude et phase. Une méthode itérative était proposée pour des problèmes bidimensionnels : un premier calcul permet de déterminer une première approximation locale de la phase, qui est ensuite incorporée dans la base du sous espace de discrétisation permettant le recalcul de la solution. Les auteurs ont étendu cette formulation aux problèmes de diffraction dans un milieu infini [CHA99].

Les méthodes sans maillage fournissent également un excellent cadre d'approximation pour enrichir l'espace de discrétisation avec des informations locales sur le caractère ondulatoire de la solution. Lacroix *et al.* [LAC03] ont proposé d'étudier, pour l'acoustique faiblement couplée, deux approches : la première consiste à incorporer un ensemble d'ondes planes, la deuxième, similaire à l'idée de Chadwick *et al.*, consiste à calculer itérativement une base locale grâce à un calcul préalable de la phase. Cette méthode est également décrite au chapitre 2.

La méthode EFGM a également été formulée pour la réponse (statique et) dynamique des plaques et coques. Une analyse du blocage en cisaillement transversal est proposée dans [KAN01] et une application aux plaques composites laminées dans [DAI04].

D'autres méthodes sans maillage, adoptant des idées très similaires, ont également été proposées. Ainsi, la méthode particulière à noyau reproduisant (RKPM - Reproducing Kernel Particle Method). La méthode RKPM, proposée initialement par Liu *et al.* [LIU93], a été, entre autres, formulée par Uras *et al.* [URA97] et par Christon *et al.* [VOT01] pour une classe particulière de problèmes acoustiques et par Zhou *et al.* [ZHO04] pour les problèmes de vibrations.

Une autre méthode permettant naturellement d'incorporer des informations locales, devenue aujourd'hui très populaire et qui est très proche conceptuellement des méthodes sans maillage, est la méthode de partition de l'unité (PUM – Partition of Unity Method), initialement proposée par I. Babuška *et al.* [BAB97b, BAB98]. La méthode de partition de l'unité peut être vue comme une méthode des éléments finis généralisée dont les idées principales sont la construction d'espaces d'interpolation avec des propriétés locales d'approximation tout en conservant la conformité de ces espaces. Dans la référence [DEB04], la méthode PUM est formulée avec un enrichissement local déduit de la solution exacte de l'élastodynamique. Les termes de la solution exacte du problème homogène sont introduits partout dans la base puisque la pollution (la dispersion) est un phénomène global. Exactement comme pour l'acoustique, une très nette amélioration de la précision est obtenue si l'on enrichit la base du sous-espace avec une information locale sur la solution, préalablement calculée. Cette formulation, détaillée dans le chapitre 3, est disponible pour les poutres et les plaques. Une première implantation a également été réalisée pour des plaques composites avec un matériau visco-élastique [HAZ04].

D'autre part, l'application à l'étude de la propagation des ondes par une méthode de Trefftz a été initialement proposé par Zienkiewicz *et al.* [CHE91]. Cependant, à cette époque du développement des méthodes Trefftz, l'efficacité et la précision dépendaient très fort du problème. Dans le cadre de la vibro-acoustique, Desmet *et al.* [DES02, VAN00] ont proposé une approche d'éléments Trefftz par moindres carrés pour la dynamique et une méthode hybride

pour l'élastodynamique. L'élément clé lorsque l'on utilise une méthode de Trefftz est la définition d'un ensemble complet de fonctions $T(\text{refftz})$ qui garantit la convergence de la méthode. Bien que la convergence théorique ait déjà été démontrée, il subsiste manifestement de nombreux aspects numériques à résoudre, liés notamment à un mauvais conditionnement numérique. Ces problèmes peuvent être résolus par une décomposition en sous-domaines. De par ce point, la méthode de Trefftz semble alors être limitée à des géométries très simples afin ne pas augmenter déraisonnablement le nombre de sous-domaines à considérer.

P. Ladevèze *et al.* de leur côté, ont proposé une nouvelle formulation appelée théorie variationnelle des rayons complexes (VTCR - Variational Theory of Complex Rays) dans laquelle ils considèrent des approximations par sous-domaines a priori indépendantes, c'est-à-dire des approximations ne satisfaisant pas a priori aux conditions cinématiques et statiques aux interfaces entre sous-domaines [LAD96]. Ces conditions sont introduites explicitement dans la formulation variationnelle proposée. Une deuxième caractéristique de la méthode est l'introduction de deux échelles d'approximation et l'on suppose que la solution peut être décomposée localement en une série infinie de modes de vibration. P. Ladevèze *et al.* suggèrent également de post-traiter des grandeurs effectives comme l'énergie élastique, l'énergie cinétique, le travail dissipé, les déplacements effectifs, etc. La méthode a été appliquée avec succès à des assemblages de sous-structures homogènes ou hétérogènes [ROU03, RIO04, LAD01]. Elle a également été formulée pour les volumes, les plaques et les coques. Enfin, dans la référence [LAD04], la méthode est formulée pour calculer la solution sur une gamme de fréquences en décomposant la solution en une valeur moyenne et une perturbation. La méthode VTCR pourrait être étendue assez naturellement à l'acoustique. Cette méthode, quoique prometteuse, présente également une limitation liée à son mode de décomposition car elle est très sensible aux conditions aux limites. Elle s'applique donc également préférentiellement à des géométries simples.

Enfin, assez similairement à la méthode VTCR, on trouve encore la méthode de Galerkin discontinue (DGM - Discontinuous Galerkin Method) proposée par Farhat *et al.* [FAR01, FAR03, HAR03] dans laquelle les auteurs proposent également de décomposer la solution en deux contributions. La première est une approximation éléments finis classique, polynomiale par morceaux, et calculée sur un maillage grossier. La seconde est un enrichissement additionnée à la première et qui peut être discontinue. La continuité est ensuite forcée par une méthode de multiplicateurs de Lagrange. Les enrichissements sont faciles à construire puisqu'ils peuvent être construits indépendamment de la géométrie ou du degré d'interpolation. Ils sont alors choisis, comme dans les méthodes PUM ou Trefftz, en y incorporant une information locale. Une différence notable avec la méthode PUM est la construction par enrichissement *ajouté* et non multiplié. D'excellents résultats ont été publiés pour l'acoustique faiblement couplée sur des géométries relativement simples.

1.5 Organisation de la dissertation

L'objectif de ce mémoire d'habilitation est de montrer qu'il est possible de formuler des méthodes numériques basées sur des formulations sans maillage ou d'éléments finis généralisés (partition de l'unité) pour résoudre le problème vibro-acoustique dans le domaine des moyennes fréquences. Le mémoire est organisé en deux parties principales. Le chapitre 2 s'intéresse au problème acoustique faiblement couplé. Une méthode sans maillage, basée sur la méthode EFGM y est proposée et analysée, d'abord avec des bases polynomiales, ensuite avec des bases prédéfinies contenant des termes de la solution exacte du problème homogène associé ou avec des bases calculées itérativement. Le chapitre 3 s'intéresse ensuite au problème vibro-acoustique couplé et décrit une formulation éléments finis généralisée pour l'élastodynamique en généralisant également l'approche du calcul itératif de la base du sous-espace. Le chapitre 3 décrit également l'application des méthodes proposées à des problèmes vibro-acoustiques réalistes. Enfin, Le chapitre 4 propose quelques conclusions et offre une perspective des recherches et développements futurs dans ce domaine.