Verwijzen de PIramides naar π?

Philippe Cara

14 november 2003

ABSTRACT: Kenden de oude Egyptenaren het getal π tot op 5 cijfers na de komma? Of was dat dan niet nodig om de constructie van reusachtige piramides tot een goed einde te brengen? De overgebleven bouwwerken tonen aan dat de Egyptenaren zeer begaafd waren en hoogstwaarschijnlijk beschikten over een zekere vorm van *meetkunde*.

Samen verkennen we de wiskundige technieken van de oude Egyptenaren en proberen te begrijpen hoe zij te werk gingen. We besteden vooral aandacht aan de meetkunde met toepassingen op de bouw van piramides.

1 Inleiding

Tot op heden zoekt men in de piramides verborgen wiskundige eigenschappen. Men hoopt hiermee de lichtgelovige mensen ervan te overtuigen dat de kennis van de Egyptenaren veel groter was dan men vermoedt. We geven enkele voorbeelden.

Men beweert soms dat de rechtopstaande zijvlakken van de piramides gelijkzijdige driehoeken zijn. In de meeste piramides zijn de zijden van het grondvlak langer dan de rechtopstaande zijden. Ook beweert men dat de hoeken van de rechtopstaande vlakken van alle piramides zouden gelijk zijn. Dit is fout! Als men bijvoorbeeld kijkt naar het boek [12] waarin de hoeken vermeld worden, ziet men onmiddellijk dat ze variëren tussen 45 en 75 graden. Wel hebben de drie grote piramides op het plateau van Gizeh alledrie ongeveer dezelfde helling van 51 graden. Soms beweert men ook dat de verluchtingsschachten van de piramide van Cheops wijzen naar bepaalde sterren. Deze bewering wordt geanalyseerd in **Hoofdstuk Vanbeveren**. Een ander geloof is dat de hoek waaronder de hoofdgang leidt naar de hoofdkamer de breedtegraad van de sterrenkundige ligging van de piramide zou bepalen of dat deze gang naar de Poolster zou wijzen. Simulaties van de sterrenhemel verwerpen deze hypothese.

Een andere gekke theorie is dat de verhouding tussen de lengte van een zijde van het grondvlak van de Grote Piramide en de helft van de hoogte gelijk zou zijn aan het magische getal π. Dit zou blijken uit metingen van de hoogte en basis van de Grote Piramide tot op een centimeter nauwkeurig. In de tekst [11] bijvoorbeeld, vindt men de zin “De Grote Piramide … heeft een gemiddelde basislengte van 230.36 m met een afwijking van maximaal 10 cm. Zijn oorspronkelijke hoogte bedraagt 146.73 m en …”

Natuurlijk wordt er geen enkele bron vermeld voor deze nauwkeurige metingen. Het gaat hier zeker niet om hedendaagse metingen omdat de piramides zo afgebrokkeld zijn dat precieze metingen vandaag de dag onmogelijk zijn. Het is mij onduidelijk hoe zulke precieze metingen wel mogelijk waren in de tijd dat de piramide nog haar “oorspronkelijke hoogte” had.

Men merkt op dat de verhouding $\frac{22}{7}$ dikwijls voorkomt in de Grote Piramide van Gizeh. Dit is een populaire benadering voor het getal π. Volgens sommigen wijst dit erop dat de oude Egyptenaren π kenden en dit getal gebruikten om hun piramides te ontwerpen. We zullen in sectie 6.3 echter zien dat de Egyptenaren π **niet** benaderden met $\frac{22}{7}$, maar met $\frac{256}{81}$.

Eén van de mannen die zulke fantastische verhalen de wereld injoegen, was Charles Piazzi Smyth. Hij was een Engels astronoom die leefde van 1819 tot 1900. Hij beweerde ook dat “het 360ste deel van de basis van de Grote Piramide een vijf miljoenste deel was van de rotatieas van de aarde.” Niemand weet wat hij daarmee bedoelde.

Mits het aanpassen van afrond- en meetfouten, is het zeker gemakkelijk om π te vinden maar waarschijnlijk was dit *niet* niet dé basisformule voor de constructie van piramides. Als je in een willekeurig gebouw zoekt naar afmetingen die als verhouding π hebben, zal je die dikwijls snel vinden.

Andere mensen “vonden” ook de *Gulden Snede* door te redeneren met de verhoudingen tussen basis, hoogte en helling. Ook oppervlakten van de zijvlakken “leiden” tot dit magische getal dat in de wiskunde verbonden is met de regelmatige vijfhoek. Hieruit zou dan volgen dat de Egyptenaren de regelmatige vijf- of tienhoek konden construeren en zijn oppervlakte konden berekenen uit de oppervlakte van de omgeschreven cirkel.

De Gulden Snede

Beschouw een rechthoek van lengte L en breedte B. Men zegt dat die rechthoek voldoet aan het *principe van de Gulden Snede* indien de lengte zich verhoudt tot de breedte zoals de som van lengte en breedte zich verhoudt tot de lengte. Symbolisch heeft men dus

$$\frac{L+B}{L} = \frac{L}{B}$$

De verhouding $\frac{L}{B}$ tussen de lengte en de breedte van een rechthoek die voldoet aan het principe van de Gulden Snede, noteert men ϕ en noemt me het *Gouden Getal*.

Men leidt gemakkelijk af dat ϕ voldoet aan

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

of

$$\phi + 1 = \phi^2$$

Deze vergelijkingen tonen de zeer bijzondere eigenschappen van het getal ϕ: het kwadraat van ϕ is $\phi + 1$ en het invers $\frac{1}{\phi}$ is $\phi - 1$. Hieruit volgt dat ϕ een oplossing is van de vierkantsvergelijking

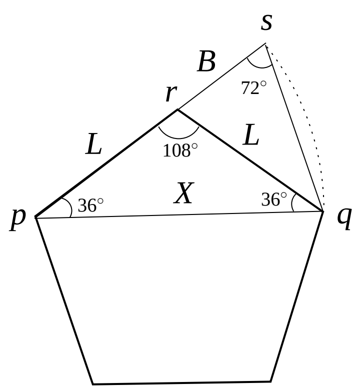
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Standaardmethoden voor het oplossen van vierkantsvergelijkingen leveren

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Merk op dat $\phi_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ook voldoet aan bovenstaande vergelijking, maar verworpen wordt omdat ϕ_- negatief is en de verhouding $\phi = \frac{L}{B}$ positief moet zijn.

Als men een regelmatige vijfhoek met zijdelengte 1 tekent, bedraagt de lengte van zijn diagonalen juist ϕ, het Gouden Getal. Om dit te zien, gaan we als volgt te werk (zie figuur 1). In een



Figuur 1: Berekening van de diagonaal van een regelmatige vijfhoek

regelmatige vijfhoek met zijdelengte L, noteren we de lengte van de diagonaal $[p,q]$ met X. Pas een afstand X vanuit p af op de rechte pr. Dit geeft een gelijkbenige driehoek spq. Doordat de hoek van de vijfhoek in r juist 108 graden bedraagt en de driehoek prq ook gelijkbenig is, weet men dat de hoek in p exact 36 graden is. Hieruit volgt dat de hoek in s juist 72 graden moet zijn. Door verder met verwante hoeken te redeneren, bekomt men dat de driehoeken spq en rqs gelijkvormig zijn. Het verschil $X - L$ noteren we B. Dan levert de gelijkvormigheid

$$\frac{L}{B} = \frac{L + B}{L}$$

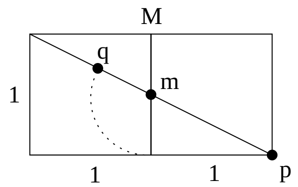
Dit betekent juist dat de verhouding $\frac{L}{B}$ gelijk is aan ϕ! Indien de zijdelengte L gelijk is aan 1, volgt dat

$$\phi = \frac{L + B}{1} = X$$

In vele gebouwen vindt men het Gouden Getal terug. Dit volgt uit het feit dat vele eenvoudige meetkundige constructies aanleiding tot de verhouding ϕ.

Eenvoudige constructie van het Gouden Getal

Berekent men de lengte van de diagonaal van een rechthoek waarvan de lengte tweemaal de breedte bedraagt, krijgt men $\sqrt{5}$. Inderdaad, de stelling van Pythagoras zegt $5 = 1^2 + 2^2$. Deze rechthoek bestaat eigenlijk uit twee vierkanten met zijde 1 die aan elkaar gekleefd zijn langs het lijnstuk M. Dit lijnstuk snijdt de diagonaal middendoor zodat de afstand van een hoekpunt p tot M, gemeten volgens de diagonaal juist $\frac{\sqrt{5}}{2}$ bedraagt.



Figuur 2: Constructie van het Gouden Getal in een rechthoek met breedte 1 en lengte 2

Ook snijdt de diagonaal het lijnstuk M van lengte 1 in twee gelijke delen. Daardoor kan men gemakkelijk de afstand $\frac{1}{2}$ vanuit het snijpunt m op de diagonaal afpassen. De resulterende afstand $|pq|$ bedraagt $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \phi$. Dit toont waarom bouwwerken waarin de eenvoudige verhouding $\frac{1}{2}$ voorkomt, ook dikwijls aan de Gulden Snede voldoen.

Aangezien $\frac{1}{2}$ zowat de eenvoudigste breuk is die er bestaat, lijkt het aannemelijk dat de piramides geconstrueerd worden uitgaande van dat getal. Via eenvoudige meetkundige bewerkingen komt men dan tot de Gulden Snede, eventueel zonder het met opzet te doen. Men mag dus oorzaak en gevolg niet verwarren. De Egyptenaren kenden het getal ϕ niet en vertrokken niet van dit getal om hun bouwwerken te ontwerpen. Het zijn hun eenvoudige constructies die *leidden* tot de Gulden Snede.

Men vindt in de literatuur vele meetkundige constructies van de Grote Piramide van Gizeh terug. Voorbeelden zijn te vinden in [11] en [6]. De eerste constructie steunt op bovenstaande constructie met een rechthoek van breedte 1 en lengte 2 en toont dat men de verschillende plaatsen (koningskamer, verluchtingsschachten, ...) in de piramide kan bekomen aan de hand van eenvoudige meetkundige constructies. Natuurlijk verschijnt het Gouden Getal, maar enkel als *gevolg* van de constructie.

In [6] gaat men ervan uit dat de afstanden tussen verschillende belangrijke punten in de constructie van de Grote Piramide, in el gemeten, een geheel getal moeten zijn. Dit levert ook eenvoudige constructies voor de belangrijke plaatsen in de piramide en maakt geen gebruik van hoeken, enkel verhoudingen tussen lengte en breedte van rechthoeken. Deze verhoudingen noemden de Egyptenaren *sekhed*. We zullen in sectie 6.6 zien hoe dit in zijn werk gaat.

Er bestaan heel wat andere theorieën en pseudo-wetenschappelijke werken over de piramides. Dergelijke zijn met geen enkel bewijs gestaafd en worden verder in deze tekst buiten beschouwing gelaten.

2 Kenden de oude Egyptenaren wiskunde?

Men ken zeggen dat de wiskunde van het oude Egypte behoort tot de "prehistorie van de wiskunde". Wie de geschiedenis van de wiskunde wil bestuderen, moet eerst afspreken wat hij/zij als wiskunde zal beschouwen. Dit is natuurlijk geen eenvoudige vraag aangezien wiskunde vooral een *manier van denken* is en wij ons enkel kunnen baseren op bewaard materiaal zoals geschriften en tekeningen.

Het lijkt aannemelijk dat de wiskunde (in de breedste zin van het woord) is ontstaan uit het "tellen". Tellen doe je als je bepaalde voorwerpen als *gelijkaardig* beschouwt. Dit wil zeggen dat je om te tellen reeds een zeker niveau van abstractie moet bereikt hebben. Als je twee auto's ziet, hoeven ze niet van hetzelfde model of van dezelfde kleur te zijn. Ruwweg is een auto een voorwerp met vier wielen. Dit patroon —een voorwerp met vier wielen— herkennen wij en als twee voorwerpen in dit patroon passen, zeggen we dat er twee auto's zijn. In de ontwikkeling van de mens kan men ongeveer zeggen vanaf wanneer hij slim genoeg was om patronen te herkennen, juist doordat men resultaten van tellingen terugvindt. Zo vond men beenderen met krasjes terug die dateren uit het Paleolithicum (35.000 tot 20.000 v.C.). De krasjes staan op zeer regelmatige afstand van elkaar en vormen groepjes van vijf. Men interpreteert dit als een telling.

Hier ziet men een tweede ingrediënt dat voorkomt bij geschiedkundig onderzoek, namelijk *interpretatie* van de bronnen. Men vindt voorwerpen terug en gaat dan nadenken over hun betekenis en oorsprong. Zulk een interpretatie blijft juist, tot een nieuwe ontdekking ze tegenspreekt. Dit geldt ook voor de interpretatie van wiskundige bronnen: men denkt dat krasjes op beenderen wijzen op een bepaalde vorm van intelligentie en tot nu toe is dit de meest aannemelijke verklaring voor deze voorwerpen. Verder zullen we een interpretatie geven van verschillende bronnen in verband met wiskunde ten tijde van de farao's. Deze interpretatie zal natuurlijk sterk beïnvloed worden door onze huidige kennis van de wiskunde. Het is best mogelijk dat de Egyptenaren een totaal andere gedachtengang hadden dan de onze en dat hun technieken anders tot stand kwamen dan wij vermoeden.

In het algemeen kan men zeggen dat de wiskunde van het oude Egypte enkel diende voor het oplossen van concrete problemen. De meeste bronnen geven dan ook geen algemene methodes, maar enkel een voorbeeld van berekening. De oude Egyptenaren maakten geen enkel verschil tussen correcte resultaten en benaderingen. Dit komt niet echt overeen met het beeld van de hedendaagse wiskunde, met algemene *stellingen* die rigoureus *bewezen* worden. Deze meer abstracte wiskunde ontstond bij de Grieken vanaf 600 v.C.

Prehistorische beschavingen ontstonden vooral in de nabijheid van grote rivieren. De Nijl is één van de langste stromen van de wereld en was de wieg van de Egyptische beschaving. De Nijl-vallei was op natuurlijke wijze goed beschermd en dit bevorderde de ontwikkeling van kunst en techniek. Aangezien de Nijl zorgde voor voldoende voedsel, werden de Egyptenaren niet verplicht handel te drijven met het buitenland. Daardoor kwamen ze niet veel in contact met andere beschavingen en kan men stellen dat zij hun technieken volledig zelf hebben ontwikkeld. Kunst was vooral zichtbaar in muurtekeningen en was, in vergelijking met de Soemerische kunst in dezelfde periode, zeer hoogstaand. Het zou dan ook niemand verbazen indien de wetenschap ook zulk een hoog niveau zou halen. De bewijzen hiervan heeft men nochtans (nog) niet kunnen vinden. De oorzaak hiervan ligt in het feit dat de Egyptenaren op papyrus schreven. Dit medium is zeer vergankelijk en het is mogelijk dat vele geschriften de tand des tijds niet overleefden. In sectie 4 sommen we de beschikbare bronnen met wiskundige inhoud op.

3 Gebruik van de wiskunde

Eén van de voornaamste toepassingen van de wiskunde bij de oude Egyptenaren was hun kalender. Voor de landbouw was het zeer belangrijk te kunnen voorspellen wanneer de Nijl uit haar oevers ging treden. Het jaar bestond uit 12 maanden van elk 30 dagen plus 5 *eindejaarsdagen*. De eindejaarsdagen waren de verjaardagen van de goden Osiris, Horus, Seth, Isis en Nephthys. De 12 maanden werden onderverdeeld in 3 seizoenen van elk 4 maanden: de *overstromings-* of *zaaiperiode*, de *groeiperiode* en de *oogstperiode*. Deze kalender met 365 dagen per jaar werd door Julius Caesar in 45 v.C. overgenomen. Hij was accurater dan de kalender die tot de hervorming door Gregorius XIII in 1582 (invoering van schrikkeljaren) in Europa werd gebruikt.

Deze kalender was gebaseerd op de waarneming van de ster Sirius. Het begin van de jaarlijkse overstroming van de Nijl kwam overeen met de dag waarop Sirius net voor zonsopgang zichtbaar werd aan de hemel. Deze dag betekende het begin van het zaaiseizoen en kwam overeen met nieuwjaar.

Volgens verschillende referenties (zie bijvoorbeeld [13] of [10]) ontstond deze kalender reeds tijdens de Eerste Dynastie en werd hij officieel ingevoerd in 4241 v.C.

Omstreeks 3000 v.C., op het einde van de Tweede Dynastie, is er een snelle ontwikkeling van de bouwkunde. We bezitten geen manuscripten uit die periode maar het was toen dat men, op ongeveer 500 jaar, evolueerde van een eenvoudig muurtje tot de Grote Piramide van Gizeh omstreeks 2550 v.C. Het was zeker niet eenvoudig om op een niet-vlakke woestijngrond het grondvlak van een piramide af te bakenen, rechte hoeken te tekenen, afstanden te meten, ...

De oppermachtige farao's werden bijgestaan door een administratieve staf. Deze moest zorgen voor het innen van belastingen, het bouwen van piramides, enz. Hier kwam de wiskunde weer te pas bij berekeningen. De Egyptenaren ontwikkelden een rekenkunde met een tiendelig cijferstelsel. Wij werken ook met een tiendelig talstelsel, maar bij ons hangt de *waarde* van een cijfer af van de plaats waar het staat in een getal. Het cijfer 5 in het getal 32549 staat voor 500 terwijl het maar 5 waard is in 8795. Het Egyptisch talstelsel was niet-positioneel. Een gevolg daarvan is dat het cijfer nul niet nodig was. Daarentegen moesten ze wel verschillende symbolen gebruiken voor 5 en 500.

Herodotos (484–425 v.C.) gaf een beschrijving van het oude Egypte. Hij schreef onder andere over de bouw van de piramides, de Egyptische samenleving en het belastingssysteem ten tijde van Ramses II (omstreeks 1347 v.C.). Hij omschreef het volgend systeem. Indien de landbouwgrond van een boer door de Nijl werd overstroomd en gedeeltelijk onbruikbaar werd, moest die boer slechts een deel van zijn belastingen betalen. Dit deel werd berekend aan de hand van de verhouding tussen het overstroomde deel en de totale landbouwgrond. Ook wanneer de grenzen van landbouwgronden door overstromingen niet meer zichtbaar waren, herverdeelde men de grond aan de hand van meetkundige technieken. We zien dus dat het meten en berekenen van oppervlakten een belangrijke rol speelde in de Egyptische samenleving. Herodotos zegt dat de Egyptenaren hierdoor "de kunst van het landmeten" leerden. Een andere aanwijzing van het belang van deze berekeningen (zie [13, p.52]) vindt men op het graf van een zekere Penno, een tijdgenoot van Ramses VI (ca. 1150 v.C.) die leefde te Ibrim (in Nubië). Op de grafsteen kan men de omtrek en oppervlakte van vijf districten lezen. Verder vindt men op de muren van de Horus-tempel van Edfu een lijst van grondpercelen die bij de tempel hoorden. Van elke lap grond wordt de oppervlakte (benaderd) berekend. Er wordt gebruik gemaakt van dezelfde formule voor vier- en driehoekige stukken grond (zie sectie 6.1).

De oude Egyptenaren kenden methodes voor het berekenen van inhouden van (afgeknotte) piramides en graansilo's (zie sectie 6.5). Hun formules waren niet altijd correct. Ze waren ook in staat omzettingen te maken tussen verschillende eenheden van inhoud, lengte en massa (zie bladzijde 22). Deze berekeningen lieten bijvoorbeeld toe te berekenen hoeveel stenen nodig waren bij de bouw van een piramide of tempel, wat de verhouding tussen verschillende ingrediënten moest zijn bij het brouwen van bier, het maken van brood, ...

4 Beschikbare bronnen

Hier verzamelen we de teruggevonden historische documenten met een wiskundige of technische inhoud.

1. 3100 v.C. : een soort *scepter* waarop verschillende getallen in de miljoenen en honderdduizenden staan gegrift in hiëroglyfen. Het is een soort boekhouding van de veroveringen na een oorlog. Dit scepter bevindt zich nu in een museum in Oxford.

2. 2550 v.C. : De *Grote Piramide van Gizeh*. Dit bouwwerk bracht ongetwijfeld vele wiskundige problemen met zich mee. Voor de constructie van zulk een monument moet men onder andere loodlijnen construeren, hoeken bepalen, oppervlakten en volumes berekenen, voorspellen hoeveel rotsblokken nodig zijn voor een piramide,... De bouwkundige details van deze piramide en haar constructie vind je in **Hoofdstuk Sol**.

3. 1880 v.C. : De *Reisner papyri* werden in 1904 door George Reisner gevonden. Het gaat om vier zwaar beschadigde papyri die in een houten doodskist werden ontdekt. Deze documenten vormden een soort bestek voor de bouw van een tempel. Er werden volumes van muren en stenen blokken berekend en er werd bepaald hoeveel mankracht nodig was om die blokken uit te houwen. Ook zijn volumes van opslagplaatsen gegeven voor de stenen.

4. 1850 v.C. : De *Moskou papyrus*. Deze papyrus werd in 1893 gekocht door V.S. Golenishchev. In 1912 schonk hij zijn hele collectie Egyptische vondsten aan het museum voor schone kunsten in Moskou. De Tsaar beloofde hem in ruil een levenslange rente. Na de revolutie in 1917 werd deze rente nooit meer uitbetaald. Golenishchev overleed in 1947. De papyrus is meer dan 5 meter lang en 8 centimeter hoog. Hij bevat 25 problemen, waarvan slechts enkele nog goed leesbaar zijn. Deze papyrus is zeer belangrijk omdat hij de berekening van de inhoud van een afgeknotte piramide bevat. Het is de enige papyrus waarin men dit terugvindt en bovendien is de formule die men hieruit afleidt correct! Ook bevat de papyrus een probleem dat men kan interpreteren als de berekening van de oppervlakte van een halve sfeer (zie sectie 6.5). Als deze interpretatie klopt, kan men dit beschouwen als het meest ingewikkelde (correcte) resultaat uit de Egyptische wiskunde. Over de afgeknotte piramide schreef Turajeff reeds een artikel [15] in 1917. W.W. Struve publiceerde in 1930 een volledige vertaling van de Moskou papyrus [14]. Dit was niet eenvoudig omdat de papyrus beschadigd was en zijn schrijver een zeer slecht handschrift had.

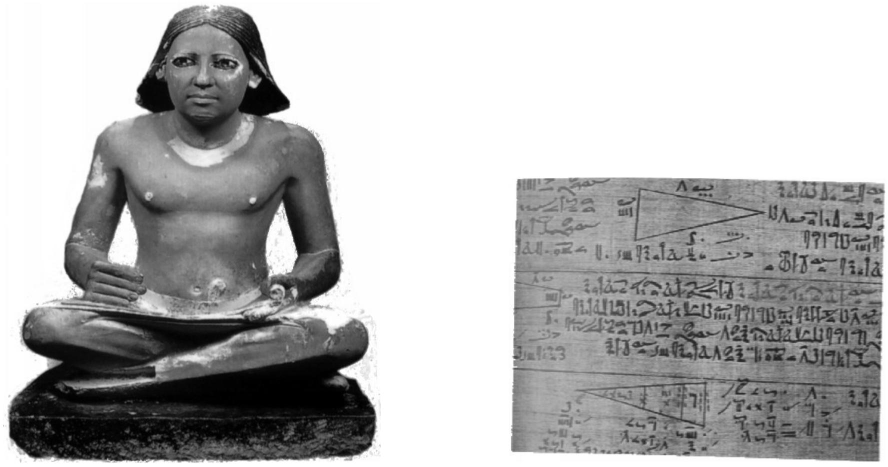
5. 1850 v.C. : De zogenaamde *merkhet* is het oudste gekende astronomisch instrument. Het bestond uit een schietlood samen met een mikstang en diende om de piramides te oriënteren op de Poolster (zie **Hoofdstuk Sol**). Dit instrument ligt nu in het museum van Berlijn.

6. 1800 v.C. : De *Kahun papyri* werden in 1889 door W.M.F. Petrie gevonden te Kahun. Deze papyri bevatten 6 wiskundige passages.

7. 1650 v.C. : De *Rhind papyrus* en *lederen rol*. De documenten werden samen te Luxor gekocht door de Schot Henry Rhind (1833–1863) in het jaar 1858. Deze advocaat kwam op jonge leeftijd naar het warme Egypte om gezondheidsredenen en kreeg interesse voor de Egyptologie. In 1855 ging hij naar Thebes, waar hij zich specialiseerde in graftombes. Beide geschriften werden ontdekt in de ruïnes van het Rameseum te Thebes en werden later gekocht door Rhind. Sinds 1864 zijn ze eigendom van het beroemde *British Museum*. De afmetingen van de lederen rol zijn ongeveer 25 bij 42 centimeter. Hij bleef omwille van zijn zeer broze structuur gedurende 60 jaar opgerold. Doordat het geen papyrus was, dacht men dat de lederen rol zeer belangrijke informatie zou bevatten. Het was in 1927 dat A. Scott en H.R. Hall hem eindelijk durfden ontrollen. Zij vonden twee copijen van 26 sommen met stambreuken (breuken waarvan de teller 1 is). Men vermoedt dat het hier gaat om een soort geheugensteuntje bij berekeningen, geschreven door een bediende in de administratie. Men weet niet of er een verband is tussen de lederen rol en de Rhind papyrus, die in zijn nabijheid werd gevonden.

   De Rhind papyrus is dubbelzijdig beschreven. Eén zijde bevat een tabel met breuken zoals de lederen rol en op de andere zijde staan 87 vraagstukken, met oplossing. De Rhind papyrus werd geschreven door een zekere Ahmes. In feite copieerde hij teksten die al tweehonderd jaar voordien bestonden. We weten dat precies omdat hij dat zelf schrijft aan het begin van de tekst. Zijn werk beschrijft hij ook als “Aanwijzingen voor het begrijpen van alle duistere dingen.” Buiten zijn naam, vermeldt hij de datum: “het jaar 33, in de vierde maand van het overstromingsseizoen, onder zijne majesteit koning van Opper en Lager Egypte A-user-Rê”. Het gaat hier hoogstwaarschijnlijk over de zesde Hyksos koning omstreeks 1650 v.C. Men vermoedt dat de wiskunde van de Rhind papyrus al meer dan 200 jaar oud was toen deze geschreven werd. Sommigen menen zelfs dat de meeste van de beschreven technieken reeds gekend waren ten tijde van de eerste dynastie, rond 3500 v.C.

   Zoals eerder gezegd, bevat de Rhind papyrus enkel concrete problemen. Men kan hieruit verschillende hypothesen afleiden. Het is mogelijk dat



Figuur 3: Ahmes en een stukje van zijn papyrus

Ahmes dit opschreef als een soort cursus, waaruit de leerlingen zelf de algemene methodes moesten distilleren. Het zou ook kunnen dat Ahmes gewoon de oplossing van concrete problemen overschreef om rekentechnieken te oefenen of te leren.

De Rhind papyrus is de belangrijkste bron van wiskundige informatie uit het oude Egypte. In hedendaagse termen kan men zeggen dat er toepassingen in staan op het oplossen van lineaire vergelijkingen in één onbekende, rekenen met breuken en elementaire meetkunde.

8. 1500 v.C. : Oudste gekende *zonnewijzer*. Hij ligt nu in het museum van Berlijn. De dag werd opgedeeld in 12 uren. De nacht bestond ook uit 12 uren, die overeen kwamen met het rijzen van bepaalde sterren aan de horizon.

9. 1350 v.C. : De *Rollin papyrus* bevat een boekhouding met zeer grote getallen. Deze papyrus ligt nu in *Le Louvre* te Parijs.

10. 1167 v.C. : De *Harris papyrus* bevat ook een soort boekhouding waarin de bezittingen van tempels worden vastgelegd. Toen omstreeks 1167 v.C. Ramses IV de troon besteeg, begon hij onmiddellijk met het opstellen van een document dat het werk van zijn vader, Ramses III, moest verderzetten. Het betreft een lijst van alle voorwerpen die zich in die tijd in de Egyptische tempels bevonden, samen met hun waarde. Deze papyrus geeft een idee van de rekenkunde die de Egyptenaren hadden ontwikkeld.

Recentere oude Egyptische bronnen dan hierboven tonen geen grote vooruitgang meer op gebied van wetenschap; er zijn zelfs aanwijzingen voor een achteruitgang. Aangezien de papyri dikwijls werden herschreven, kan men aannemen dat al het bovenstaande reeds gekend was in de tijd van de Gizeh piramides (2550 v.C.).

5 Rekenkunde

We blijven hier zeer kort omdat de meetkunde een veel belangrijkere rol speelt bij de constructie van de piramides. De geïnteresseerde lezer kan meer informatie vinden in de referenties [8] en [4]. Uit de oplossingen die men in de papyri vindt, leidt men af dat de Egyptenaren de optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling van natuurlijke getallen (dit zijn positieve gehele getallen) kenden. Hun rekentechniek was gebaseerd op de "tafel van 2" en "stambreuken".

Om bijvoorbeeld 12×13 uit te rekenen berekenden zij achtereenvolgens $12 \times 1 = 12$, $12 \times 2 = 24$, $12 \times 4 = 24 \times 2 = 48$, $12 \times 8 = 48 \times 2 = 96$. Dan merkten ze op dat $13 = 1 + 4 + 8$, zodat $12 \times 13 = 12 \times 1 + 12 \times 4 + 12 \times 8 = 12 + 48 + 96 = 156$.

De deling en stambreuken

Delingen zagen zij als vermenigvuldigingen, maar dan omgekeerd geformuleerd. Om 1120 te delen door 80 vroeg men zich af met hoeveel men 80 moest vermenigvuldigen om 1120 uit te komen. Ze schreven dan weer de rij $80 \times 1 = 80$, $80 \times 2 = 160$, $80 \times 4 = 320, \ldots$ op en gingen dan getallen uit die rij nemen die als som 1120 geven. Dit werkt natuurlijk enkel wanneer de deling opgaat. Daarom gingen zij ook delen door machten van 2. Laat ons bijvoorbeeld 19 delen door 8. We schrijven eerst de rij $8 \times 2 = 16$, $8 \times 1 = 8$, $8 \times \frac{1}{2} = 4$, $8 \times \frac{1}{4} = 2$, $8 \times \frac{1}{8} = 1$. En nu nemen we, zoals voor de vermenigvuldiging, de getallen die samen 19 geven. We zien dat $19 = 16 + 2 + 1$ zodat $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. De uitkomst is dus uitgedrukt in stambreuken.

Stambreuken zijn breuken waarvan de teller 1 is. Als je stambreuken hebt, kan je alle berekeningen uitvoeren aan de hand van enkele eenvoudige regeltjes, zoals men die bijvoorbeeld terugvindt op de lederen rol. Het was dus belangrijk om alle breuken te kunnen omzetten in sommen van stambreuken. Dit kan gebeuren op de manier die we net beschreven maar om sneller te gaan stelden de Egyptenaren tabellen op. E´en kant van de Rhind papyrus bevat een lijst van uitdrukkingen als som van stambreuken van alle breuken van de vorm $\frac{2}{n}$, met n een oneven getal tussen 5 en 101. Dit was voldoende aangezien zij werkten met de tafel van 2.

Meestal schreven de Egyptenaren hun wiskundige berekeningen op met woorden. Toch hadden zij enkele symbolen ontwikkeld. De symbolen "plus" en "min" waren respectievelijk een paar benen dat van rechts naar links loopt, de gewone leesrichting in Egypte, en een paar benen dat van links naar rechts loopt. Ook hadden zij een symbool voor de *gelijkheid* en voor de *onbekende* (meestal x bij ons).

Bij het oplossen van vraagstukken traden ook eerstegraadsvergelijkingen op. Een voorbeeld is probleem 24 uit de Rhind papyrus.

Probleem 24 uit Rhind papyrus

"Als men bij een getal zijn zevende deel optelt, bekomt men 19. Welk is dit getal?" In hedendaagse termen komt dit vraagstuk neer op het vinden van een oplossing voor volgende vergelijking: $x + \frac{x}{7} = 19$. De Egyptische wiskundige lost dit op door eerst te gokken. Hij probeert de waarde $x = 7$ en krijgt $x + \frac{x}{7} = 7 + 1 = 8$. Dan zoekt hij met hoeveel 8 moet vermenigvuldigd worden om aan 19 te komen. Dit is (in stambreuken) $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ en bijgevolg is $7 \times (2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ een oplossing. In stambreuken is dit $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

Soms komt men ook stelsels of kwadratische vergelijkingen tegen. Deze zijn echter altijd te herleiden tot een vergelijking van de vorm $ax^2 = b$.

Herleidbaar stelsel

Het stelsel bestaande uit de vergelijkingen $x^2 + y^2 = 100$ en $x = 3y/4$, kan onmiddellijk herleid worden tot $25y^2 = 1600$.

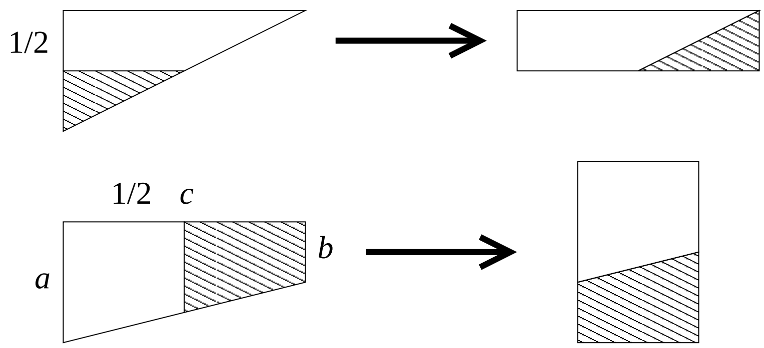
Deze kwadratische vergelijkingen komen duidelijk voort uit vraagstukken die verband houden met oppervlakteberekeningen.

6 Meetkunde

We beschrijven hier enkele meetkundige problemen met de oplossing die de oude Egyptenaren voorstelden.

6.1 Oppervlakte van drie- en vierhoeken

Het belang van het landmeten in het oude Egypte werd hoger reeds getoond. Om de oppervlakte van een perceel te bepalen, gaat men dit meestal opdelen in driehoeken en vierhoeken, waarvan men de oppervlakte apart berekent. In probleem 49 van de Rhind papyrus ontmoet men de oppervlakte van een rechthoek. Deze wordt uitgerekend als het product lengte $\times$ breedte. In probleem 51 zoekt men de oppervlakte van een driehoek. Noch de illustratie bij het probleem noch de tekst vermelden dat het hier gaat over een *rechthoekige* driehoek. De methode die (waarschijnlijk) toegepast wordt, is nochtans enkel geldig in het rechthoekige geval. De papyrus zegt dat je een halve zijde moet vermenigvuldigen met de andere zijde om de oppervlakte te bekomen. Dit komt neer op het maken van een rechthoek met dezelfde oppervlakte als de rechthoekige driehoek (zie figuur 4).

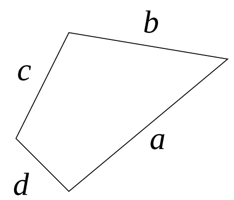


Figuur 4: Transformatie van een rechthoekige driehoek en trapezium tot een rechthoek met dezelfde oppervlakte

Het is niet duidelijk of de Egyptenaren de algemene formule voor de oppervlakte van een driehoek kenden. Dachten zij dat de methode van probleem 51 algemeen was, beseften ze dat niet alle driehoeken rechthoekig waren, waren zij tevreden met een benadering indien de driehoek niet rechthoekig was?

Op dezelfde manier berekenden zij de oppervlakte van een trapezium met de formule $(a+b)\cdot\frac{c}{2}$ (zie figuur 4). Weer is de formule enkel correct als men veronderstelt dat het trapezium rechthoekig is.

Op de muur van de Horus-tempel te Edfu ziet men dat volgende formule wordt gehanteerd voor de oppervlakte van een (willekeurige) vierhoek waarvan a, b, c en d de zijdelengten zijn en a en c overstaande zijden zijn (zie figuur 5).



$$\boxed{\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}}$$

Figuur 5: Foute formule voor de oppervlakte van een vierhoek

We vermoeden dat ze hier de formule voor het (rechthoekig) trapezium veralgemeenden. Weer is de formule slechts een ruwe benadering, tenzij de vierhoek een rechthoek is. Voor driehoeken gebruiken ze in Edfu dezelfde formule maar dan met $d=0$, opnieuw een benadering die pas goed wordt wanneer één zijde van de driehoek zeer klein is ten opzichte van de andere.

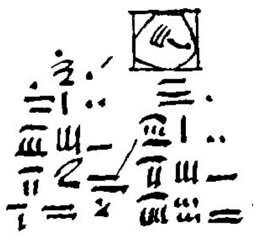
6.2 Oppervlakte van de cirkel

Verschillende problemen uit de papyri wijzen op het gebruik van de formule

$$(d - \frac{d}{9})^2 = d^2(1 - \frac{1}{9})^2$$

voor de berekening van de oppervlakte van een cirkel met diameter d. Er bestaan in de literatuur verschillende verklaringen voor deze formule. Het is mogelijk dat ze de inhoud van cilindrische en balkvormige vaten met gelijke hoogte vergeleken en zo tot de verhouding tussen de oppervlakten van vierkant en cirkel kwamen. Misschien tekenden zij een cirkel op een blad (papyrus) met zeer kleine ruitjes? Onmiddellijk rijst dan de vraag naar het bestaan van een instrument voor het tekenen van cirkels. Men vond geen enkel spoor van een voorwerp dat lijkt op onze huidige passer. Ook vindt men geen precieze tekeningen van cirkels (op papyrus). Voor meer details verwijzen we naar [2]. Wij concentreren ons op slechts één van de mogelijke verklaringen.

In tegenstelling tot de andere opgaven, is de oplossing van probleem 48 van de Rhind papyrus niet volledig met woorden omschreven. Er staat er een tekening bij, waaruit de aandachtige lezer de oplossing moet afleiden. Ahmes vergelijkt in dit probleem de oppervlakte van een cirkel met de oppervlakte van het omgeschreven vierkant. Als we de tekening nauwkeurig bekijken (zie figuur 6), kunnen we er de volgende *interpretatie* aan geven.



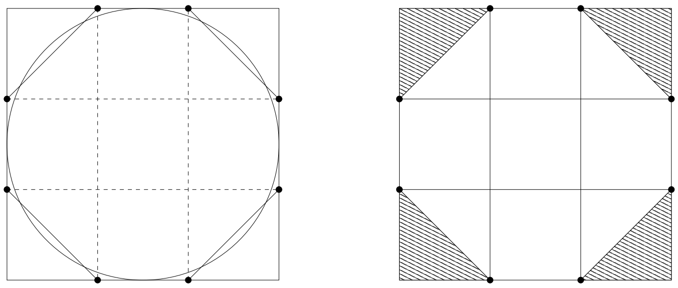
Figuur 6: Probleem 48 uit de Rhind papyrus

Interpretatie van probleem 48 uit de Rhind papyrus

Een cirkel met diameter d wordt getekend in een vierkant met zijde d. De zijden van het vierkant worden in drie gelijke delen verdeeld. De oppervlakte van de cirkel wordt benaderd door de oppervlakte van de (niet-regelmatige) achthoek met de verdeelpunten als hoekpunten (zie figuur 7).

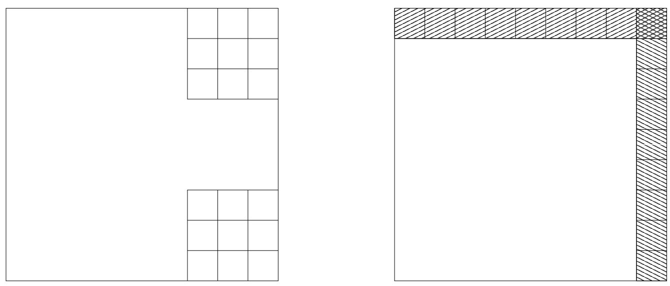
Als men op de evenwijdige zijden van het vierkant de overeenkomstige verdeelpunten verbindt, krijgt men negen kleinere vierkanten. De oppervlakte van de achthoek is gelijk aan de oppervlakte van zeven van die vierkantjes.

Het berekenen van $\frac{7}{9}$ van de oppervlakte van een vierkant was nog niet eenvoudig genoeg (of niet bevredigend qua nauwkeurigheid) voor de Egyptenaren en ze zetten hun meetkundige



Figuur 7: Benadering van een cirkel door een achthoek

redenering voort. E´en klein vierkant deelden zij nog eens op in negen kleinere vierkantjes. De oppervlakte van twee kleine vierkantjes dat men moet aftrekken van die van het grote vierkant kan men ook bereiken met een rij van negen kleinere vierkantjes plus een kolom van negen kleinere vierkantjes. Deze rij en kolom kan je netjes langs de rand van het vierkant leggen zoals in figuur 8. Men ziet dat het kleine vierkant in de rechterbovenhoek behoort tot de rij en de kolom zodat men



Figuur 8: Verdeling van de twee kleine vierkanten in kleinere blokjes

in die figuur 17 kleine vierkantjes aftrekt in plaats van 18. De Egyptenaren hielden geen rekening met die fout of beseften niet dat die er was. Zij bekwamen dus dat de oppervlakte van een cirkel met diameter d bij benadering gegeven wordt door:

$$(d - \frac{d}{9})^2 = d^2(1 - \frac{1}{9})^2 = \frac{64}{81}d^2$$

We zullen zien dat deze benadering niet zo slecht is. De tweede benadering (17 vierkantjes in plaats van 18) heft in feite de eerste benadering (met de achthoek) gedeeltelijk op.

6.3 Benadering van het getal π

We kunnen nu het vorige resultaat *interpreteren* aan de hand van onze huidige wiskundige kennis. Als we de formule van de Egyptenaren voor de oppervlakte van een cirkel met diameter $d = 2r$ vergelijken met de formule die wij gebruiken, geeft dit:

$$\pi\frac{d^2}{4} \approx \frac{64}{81}d^2$$

of

$$\pi \approx 4\frac{64}{81} = \frac{256}{81} = 3.1604938\ldots$$

De verhouding tussen de diameter van een cirkel en zijn omtrek is dezelfde als de verhouding tussen het kwadraat van zijn straal en zijn oppervlakte. Deze verhouding stellen wij voor met het symbool π en is ongeveer gelijk aan $3.1415926535\ldots$

De wiskundige geschiedenis van het getal π begint pas echt met Archimedes (in 225 v.C.). Hij *bewees* dat de twee verhoudingen hierboven wel degelijk hetzelfde getal opleveren. Hij bewees ook dat $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ door de zijde van een regelmatige 96-hoek te berekenen met behulp van zeer goede benaderingen van vierkantswortels.

Het is duidelijk dat de Egyptenaren het getal π op zich **niet** kenden, maar dat zij wel een benadering hadden voor de verhouding tussen de oppervlakte van een cirkel en het kwadraat van zijn diameter. Hieruit leiden *wij* een benadering voor π af en merken op dat die niet zo ver ligt van de betere benaderingen die we nu, 4000 jaar later, kennen.

In de geschiedenis kan men dikwijls benaderingen van π afleiden uit zekere teksten. Het volgende citaat komt uit de Bijbel (2 Kronieken 4:2) en beschrijft de constructie van het paleis van koning Salomo.

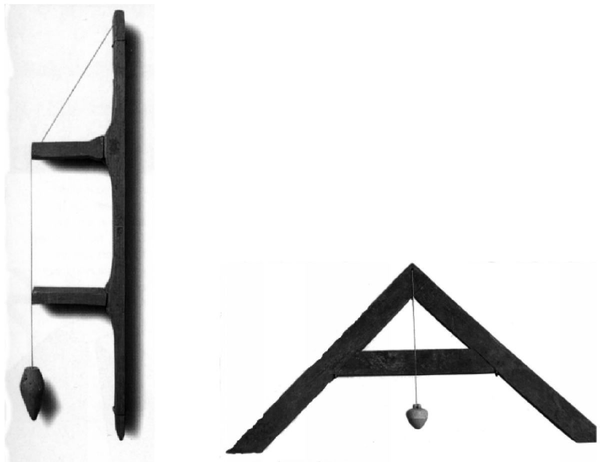
> Voorts maakte hij de zee, van gietwerk, tien el van rand tot rand, geheel rond, vijf el hoog, terwijl een meetsnoer van dertig el haar rondom kon omspannen.

Het gaat hier om een cilindervormig waterreservoir met een diameter van 10 el en een omtrek van 30 el. We leiden daaruit af dat de Bijbelse benadering voor π gelijk was aan 3. Weer moet men erop wijzen dat het getal π ten tijde van Salomo niet gedefinieerd was en dat wij de gegevens van de tekst *interpreteren* in de context van de huidige wiskunde.

Uit de berekeningen van de Babyloniërs vinden we een betere benadering voor π dan in de Bijbel, namelijk $3\frac{1}{8}$. Dit is minder goed dan de Egyptenaren die omstreeks dezelfde tijd leefden. We zien dat noch de Egyptenaren noch de Babyloniërs het getal π kenden. Het is dus absurd te beweren dat π aan de basis ligt van de constructie van de piramides. Ook gebruikten de Egyptenaren niet de beroemde breuk $\frac{22}{7}$ als benadering voor π om oppervlakten te berekenen.

6.4 Loodlijnen en rechte hoeken

Bij de constructie van piramides is het nauwkeurig construeren van rechte hoeken en loodlijnen van zeer groot belang (zie **Hoofdstuk Sol**). Via allerhande instrumenten kon men wel nakijken of een muur verticaal stond (schietlood), of een vloer vlak en horizontaal lag (een soort waterpas zonder water), ... Voorbeelden van zulke instrumenten zijn te zien in figuur 9.



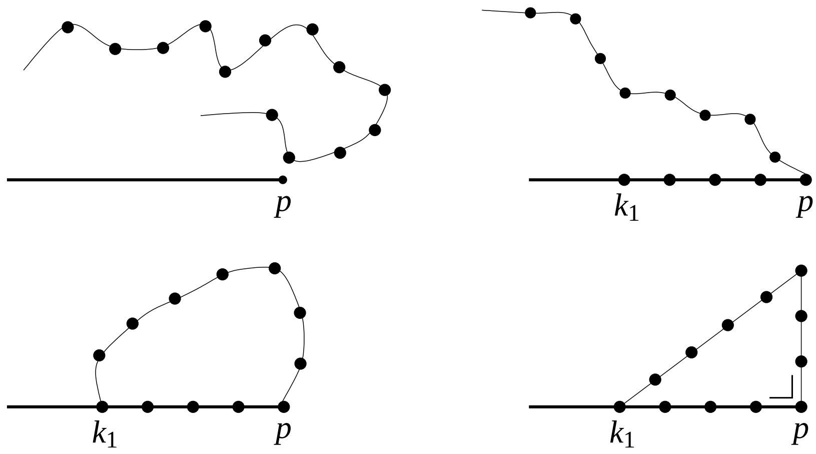
Figuur 9: Instrumenten voor het maken van verticale muren en horizontale vloeren

Anders is het gesteld met het tekenen van rechte hoeken in een vlak. Dit was bijvoorbeeld zeker nodig bij de constructie van het grondvlak van een piramide, dat een zo perfect mogelijk vierkant moet zijn. Vermits we in de overgebleven documenten niets terugvinden over constructies, moeten we ons beperken tot het formuleren van hypothesen.

Toen we in de schoolbanken zaten hebben we allemaal geleerd hoe we met een passer een loodlijn kunnen maken op een lijnstuk. Deze constructie was reeds gekend bij de Grieken maar voor Egypte weten we het niet. We vonden geen passers terug, maar voor grote constructies gebruikt men beter een touw dat vastgemaakt wordt aan een paaltje. Zulke touwen heeft men niet teruggevonden, maar het is ook niet gemakkelijk om aan een stuk touw te zien of het ooit als passer werd gebruikt. Evenwel denkt men (zie [8] en [5] bijvoorbeeld) dat de constructie van een loodlijn met passer niet binnen het bereik lag van de wiskundige competentie van de oude Egyptenaren.

In 90% van de geschiedenisboeken beweert men dat de Egyptenaren rechte hoeken maakten met *knopenkoorden*. Van onze schooltijd kennen we zeker nog de *stelling van Pythagoras* die zegt dat *de som van de kwadraten van de rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek gelijk is aan het kwadraat van de hypotenusa (schuine zijde).* Deze stelling wordt dikwijls samengevat met de formule $a^2 + b^2 = c^2$. Wat minder onder ons weten is dat het *omgekeerde* ook geldt: *Als in een (willekeurige) driehoek de som van de kwadraten van twee zijden gelijk is* *aan het kwadraat van de derde zijde, dan is die driehoek rechthoekig.*

Men komt tot volgende constructie (zie figuur 10). De Egyptische ingenieurs hadden koorden met daarin knopen op gelijke afstand. Als ze een rechte hoek in een gegeven punt p van een rechte moesten construeren, legden ze hun touw zo op de grond dat er 5 knopen langs de rechte lagen met de vijfde op het punt p. Dan telden zij 8 knopen en legden de laatste knoop op de eerste knoop k_1. De derde knoop vanaf p werd nu verplaatst tot het hele touw opgespannen was. Dit resulteert in een driehoek met opeenvolgende zijden van lengte 3, 4 en 5. Vermits $3^2+4^2=5^2$, is deze driehoek rechthoekig en hebben we een rechte hoek in p.

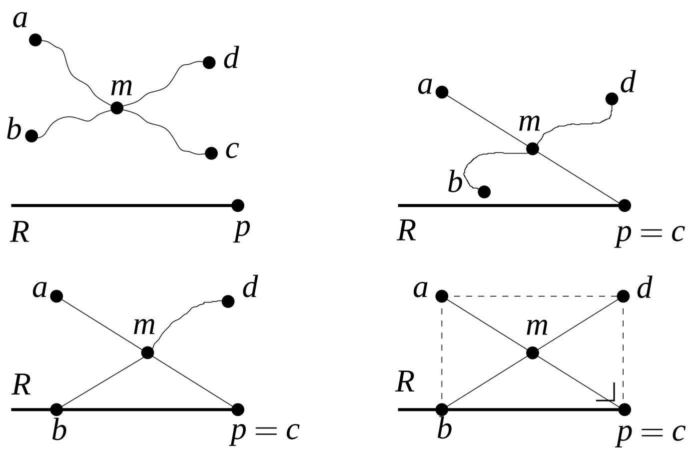


Figuur 10: Constructie van een rechte hoek met knopentouw

Dit is een zeer mooie constructie maar we hebben jammer genoeg geen enkel bewijs dat ze effectief gebruikt werd ten tijde van de farao's (zie [8, p.242]). We weten niet of de stelling van Pythagoras (of haar omgekeerde) gekend was, zelfs niet het speciale geval $3^2+4^2=5^2$.

Een andere constructie steunt op de omgekeerde van de eigenschap die zegt dat *de diagonalen van een rechthoek even lang zijn en mekaar middendoor snijden*. Als we weten dat *een vierhoek waarvan de diagonalen even lang zijn en mekaar middendoor snijden, noodzakelijk een rechthoek moet zijn,* komen we tot een constructie die nu nog gebruikt wordt in sommige Afrikaanse stammen om rechthoeken te maken (zie [7]). Veronderstel weer dat we een rechte hoek moeten construeren in een punt p van een gegeven rechte R. Ons instrument zal bestaan uit twee even lange touwen die in hun middens aan elkaar bevestigd zijn.

In figuur 11 illustreren we de gang van zaken. We noemen het middelpunt van de touwen m en hun uiteinden a, b, c en d. Leg uiteinde c in het punt p en span het touw op door aan a te trekken. Plaats nu b op de rechte R zó dat het stuk touw tussen m en b gespannen staat. Nu ga je d zo plaatsen dat het touw tussen b en

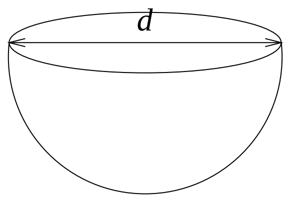


Figuur 11: Constructie van een rechte hoek op Afrikaanse wijze

d volledig gespannen wordt en dus de punten *b*, *m* en *d* op één rechte lijn liggen. Dan is de vierhoek gevormd door *a*, *b*, *c* en *d* een rechthoek zodat het lijnstuk *pd* loodrecht staat op *R*.

6.5 Manden en afgeknotte piramides

Zoals eerder gezegd is het geschrift van de Moskou papyrus zeer onduidelijk en bestaat er verdeeldheid over de interpretatie ervan. In probleem 10 gaat het over de "berekening van de oppervlakte van een mand met gegeven opening." Uit muurtekeningen van Egyptische manden leidt men af dat ze dikwijls leken op halve sferen zoals in figuur 12.



Figuur 12: De Egyptische mand in de vorm van een halve sfeer

Met de "opening" bedoelt men waarschijnlijk de diameter d. Uit de oplossing van het probleem leiden we de volgende (algemene) redenering af.

1. Je berekent het dubbel van d;
2. Bereken $\frac{8}{9}$ van dit resultaat;

3. Zoek nog eens $\frac{8}{9}$ van dit getal;

4. Vermenigvuldig tenslotte met d.

We zien dat de formule

$$A = 2\frac{64}{81}d^2$$

wordt. Vermits wij liever met de straal r van de sfeer werken, substitueren we $d = 2r$ en verkrijgen aldus

$$A = 2\frac{256}{81}r^2$$

Als we de benadering $\pi \approx \frac{256}{81}$ van sectie 6.3 nemen, krijgen we

$$A = 2\pi r^2$$

Dit is wel de correcte formule voor de oppervlakte van een halve sfeer.

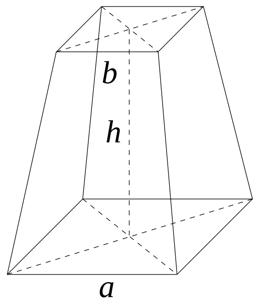
Het is niet duidelijk hoe de oude Egyptenaren aan deze formule kwamen. Eén verklaring zou komen uit het feit dat hun manden ook deksels hadden. Dit deksel was een cirkelschijf die de opening van de mand moest bedekken. Waarschijnlijk wisten de mandenbouwers uit ervaring dat voor het vervaardigen van de kuip van de mand twee keer meer materiaal nodig was dan voor het deksel. Hieruit volgt dan de formule via de formule voor de oppervlakte van een cirkel.

Er bestaan vele andere hypothesen over de interpretatie van dit probleem. Sommigen beweren dat het hier in feite gaat over de oppervlakte van een halve cirkel, anderen denken dat de manden geen halve sferen waren maar wel halve cilinders, ... We verwijzen naar [8] voor meer uitleg. Indien de bovenstaande interpretatie strookt met de werkelijkheid, kan men zeggen dat dit probleem het summum van de Egyptische wiskunde voorstelt. Het berekenen van de oppervlakte van gekromde oppervlakken zoals de sfeer kwam pas goed onder de knie bij de Grieken (Archimedes). Indien wij probleem 10 van de Moskou papyrus verkeerd begrijpen, dan zal probleem 14 zeker de grootste verwezenlijking van de Egyptische wiskunde opleveren.

Probleem 14 van de Moskou papyrus gaat over het berekenen van de inhoud van een afgeknotte piramide. Om precies te zijn gaat het over een *rechte* piramide *met vierkant grondvlak*, waarvan boven- en ondervlak *evenwijdig* zijn (zie figuur 13).

Van deze piramide zijn gegeven de zijdelengten van onder- en bovenvlak en de hoogte. Wij noteren die respectievelijk met a, b en h (zie figuur 13). Uit het voorbeeld van de papyrus leiden we volgende formule af:

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$



Figuur 13: Afgeknotte piramide

Deze formule is correct en komt inderdaad overeen met de inhoud van de beschouwde afgeknotte piramide. Over de interpretatie van probleem 14 van de Moskou papyrus zijn de meeste wetenschappers het eens. Men is bijna 100% zeker dat de Egyptenaren een correcte methode kenden voor het berekenen van de inhoud van een afgeknotte piramide. Wat men niet met zekerheid weet, is *hoe* zij aan die formule kwamen.

Aangezien de oude Egyptenaren zulke goede piramidebouwers waren, verwacht men wel een dergelijke formule. Als men kijkt naar de rest van de meetkunde bij de Egyptenaren, lijkt het wel een wonder dat die formule juist is. Ze waren wel goede landmeters maar hadden toch een verkeerde formule voor de oppervlakte van een algemene vierhoek! Men weet wel dat zij wisten dat de inhoud van een balk berekend werd als lengte $\times$ breedte $\times$ hoogte en, algemener, dat de inhoud van een prisma of cilinder gelijk was aan oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte. Door het bouwen van piramidale dozen en balken met hetzelfde grondvlak en hoogte, konden ze waarschijnlijk experimenteel zien dat de inhoud van de piramide $\frac{1}{3}$ was van die van de balk. De formule voor de inhoud van een piramide met vierkant grondvlak moesten zij dus kennen. Misschien kwam de formule voor de afgeknotte versie tot stand door de veralgemening van waarnemingen door de piramidebouwers? Een andere hypothese is dat de formule in een zeer speciaal geval meetkundig werd afgeleid (zoals voor de rechthoekige driehoek en het rechthoekig trapezium in sectie 6.1) en dan aangenomen werd als algemene formule.

Het is ook mogelijk dat deze formule *toevallig* correct was. Men kan dan ook denken dat de Egyptenaren niet alleen piramides bouwden maar allerlei meetkundige vormen probeerden. De piramides zouden dan de enige bouwwerken zijn waarvan de bouw succesvol verliep omdat hun berekeningen voor andere ruimtefiguren fout waren en de organisatie van de bouw in het honderd lieten lopen.

We geven nu een kort overzicht van de voornaamste eenheden die de oude Egyptenaren gebruikten bij hun metingen.

Maten en gewichten

el Oorspronkelijk was de el de lengte van een voorarm, van de *el*leboog tot het uiteinde van de middelvinger. Omdat die lengte varieerde van persoon tot persoon, werden er snel twee gestandaardiseerde ellen ingevoerd: de *koninklijke el* en de *korte el*. Meestal werd de koninklijke el gebruikt. Zijn lengte was 52,3 centimeter. De korte el was gelijk aan 45 centimeter.

De el werd als eenheid ook nog gebruikt bij de Grieken en Romeinen, maar zijn lengte veranderde. Een Griekse el was 46,3 centimeter en de Romeinse 44,4.

palm De *palm* was het zevende deel van een el. Voor de koninklijke el geeft dit ongeveer 7,5 centimeter. Men denkt dat de korte el soms werd opgedeeld in zes palmen in plaats van zeven.

vinger Dit is het vierde deel van een palm zodat er in een koninklijke el 28 vingers passen.

remen De *dubbele remen* was de lengte van de diagonaal van een vierkant met zijde gelijk aan ´e´en el. Voor de koninklijke el geeft dit $\sqrt{2} \times 52,3 \approx 74$ centimeter en bijgevolg was de *remen* 37 centimeter.

Deze eenheid was zeer nuttig bij het landmeten omdat zij gemakkelijk toelaat om de oppervlakte van een lap grond te verdubbelen of te halveren door een verandering van eenheid. Inderdaad: de oppervlakte van een vierkant van zijde ´e´en dubbele remen is twee vierkante el en de oppervlakte van een vierkant met zijde ´e´en remen is een halve vierkante el. Doordat alle berekeningen gebeurden met de tafel van twee, was de (dubbele) remen voldoende om oppervlakten te vermenigvuldigen met om het even welk getal.

arura Dit is de oppervlakte van een vierkant met zijde 100 el, anders gezegd: 10.000 vierkante el.

khet Dit is een lengte van 100 el. Deze eenheid komt dikwijls voor in de problemen van de Rhind papyrus.

hekat, khar, hinu en ro Deze volume-eenheden werden gebruikt voor het meten van hoeveelheden graan. Een *hekat* komt overeen met het 30ste deel van een kubieke el. De *khar* was tweederde van een kubieke el en de *hinu* was een kleinere eenheid die overeenkwam met een tiende van een hekat. De *ro* is een nog veel kleinere eenheid die waarschijnlijk gebruikt werd in kookboeken en dergelijke. Het komt overeen met een graanvolume dat ligt tussen onze koffielepel en eetlepel, om precies te zijn: het 320ste deel van een hekat.

deben en quedet De *deben* is een massa-eenheid die overeenkomt met ongeveer 100 gram. Het tiende deel van een deben is een *quedet*.

des Deze eenheid werd vooral gebruikt voor het meten van vloeibare volumes (zoals bier) en komt overeen met een halve liter.

pesu De pesu is een eenheid die de sterkte of kwaliteit van bier en brood moest weergeven. Indien ´e´en hekat graan gebruikt werd voor het maken van 10 broden, zei men dat dat brood een *pesu* gelijk aan 10 had. Als men met dezelfde hekat 15 broden maakte, was het brood van 15 pesu. Bier van 5 pesu betekende dat men per hekat graan 5 des bier maakte. De pesu was dus een soort concentratie aan graan in verschillende bereidingen. Hoe kleiner de pesu, hoe groter de concentratie graan in het brood of bier.

De pesu was nuttig bij de ruilhandel. In de Rhind papyrus staan verschillende problemen van de vorm “Hoeveel broden van pesu 20 krijg je in ruil voor 1000 broden van pesu 10?”

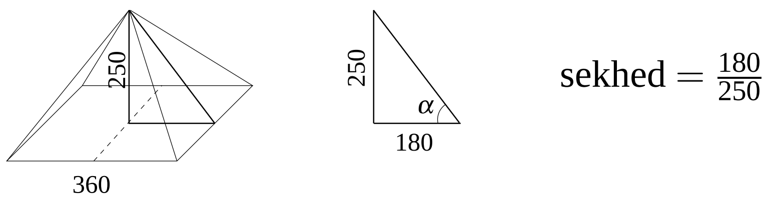
Verwant met de pesu was de sekhed die in volgende sectie aan bod komt.

6.6 Verdere berekeningen met piramiden

Hoger zagen we reeds dat de oude Egyptenaren de inhoud van een afgeknotte piramide konden berekenen. Als men kijkt in de teruggevonden documenten, vindt men buiten dit niet bijster veel vraagstukken die verband houden met piramiden. Enkel de berekening van de helling van een piramide wordt behandeld in problemen 56 tot en met 60 van de Rhind papyrus.

Probleem 56 zegt het volgende: “De zijde van het grondvlak van een piramide is 360 el en de hoogte 250. Geef mij de helling?” Het antwoord wordt als volgt berekend:

1. De helft van 360 is 180;
2. Deel 180 door 250;
3. Vermenigvuldig dit met 7;
4. Dit geeft $5+\frac{1}{25}$ palmen.



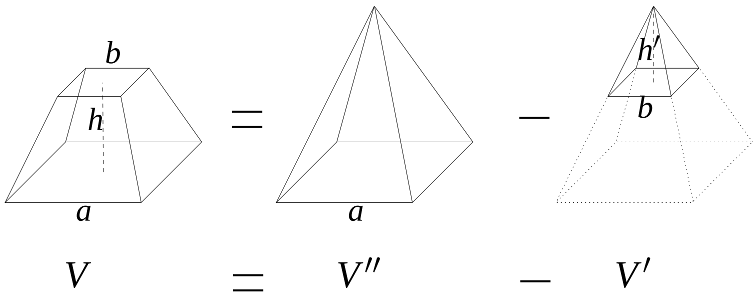
Figuur 14: Berekening van de sekhed van een piramide

Uit figuur 14 ziet men dat men de verhouding berekent tussen de afstand die horizontaal afgelegd wordt en die die verticaal wordt afgelegd als men van de voet van de piramide naar boven loopt. Het getal dat men bekomt is dus het aantal el dat men horizontaal beweegt per el dat men omhoog gaat. De Egyptenaren noemden dit de *sekhed* van de piramide. Wij zouden dit de cotangens van de hellingshoek α noemen. Op het einde wordt het resultaat met 7 vermenigvuldigd omdat een sekhed meestal uitgedrukt wordt in “palmen per el”. Deze sekhed was ook belangrijk bij het maken van zandhellingen en bij het op maat snijden van stenen tijdens de bouw van de piramides (zie **Hoofdstuk Sol**).

De andere sekhed-problemen van de Rhind papyrus zijn even eenvoudig en tonen alle verbanden tussen basis, hoogte en sekhed van een piramide met vierkante basis. Gegeven de sekhed en de basis konden de oude Egyptenaren dus de hoogte van een piramide uitrekenen. Dit geeft ons nog een mogelijke uitleg voor de berekening van de inhoud van een afgeknotte piramide.

Inhoud van afgeknotte piramide

Aangezien de sekhed of helling van een piramide overal even groot is (behalve voor de "Knikpiramide" van Dasjoer!), kan men de inhoud van een afgeknotte piramide berekenen als het verschil van de inhouden van twee piramides zoals ge¨ı llustreerd in figuur 15.



Figuur 15: Afgeknotte piramide als verschil van piramides

De sekhed s van de grote en kleine piramide bedraagt $\frac{a-b}{2h}$. Hieruit vindt men $h' = \frac{b}{2s}$, zodat men de inhoud van beide piramides kan berekenen. Dit geeft

$$V' = \frac{1}{3}h'b^2 = \frac{1}{3}\frac{b}{2s}b^2 = \frac{1}{3}\frac{hb^3}{a-b}$$

voor de kleine piramide en

$$V'' = \frac{1}{3}(h+h')a^2 = \frac{1}{3}(h+\frac{hb}{a-b})a^2$$

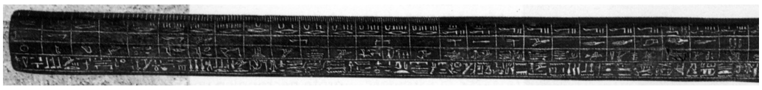
voor de grote piramide. Het volume V van de afgeknotte piramide wordt dan gegeven door

$$V'' - V' = \frac{1}{3}h\frac{a^3-b^3}{a-b} = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

Men weet wel niet of de Egyptenaren het merkwaardig product $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, dat in de laatste stap gebruikt wordt, kenden.

6.7 Meetinstrumenten en toepassingen

Voor het meten van lengtes werden meestal touwen van bepaalde lengte gebruikt. Soms waren in het touw knopen aangebracht op gelijke afstanden. Voor metingen van kleinere afstanden hadden de oude Egyptenaren een soort meetlat van één koninklijke el. In figuur 16 zie je de koninklijke el die in het museum van *Le Louvre* ligt. Men ziet dat de el verdeeld is in 28 vingers. Metingen tot op een zestiende vinger (=1,15 millimeter) nauwkeurig zijn mogelijk. Aan de tekeningen op de meetlat herkent men ook andere eenheden zoals de palm, de handbreedte (5 vingers), de vuist, de voet, . . .



Figuur 16: Egyptische meetlat

Zoals hoger reeds vermeld, hadden ze geen passers maar wel andere instrumenten (zoals knopenkoorden) om loodlijnen te construeren.

Men beweert dat de relatieve fout op de zijden van het vierkante grondvlak van de piramide van Cheops minder dan 1/14.000 bedraagt en op de rechte hoeken minder dan 1/27.000 (zie [5, 2, 13]). De piramides zijn zo afgebrokkeld en ruw gebouwd dat precieze metingen vandaag de dag onmogelijk zijn. De constructies en meetinstrumenten die de oude Egyptenaren kenden waren relatief nauwkeurig maar men kan uit hedendaagse metingen geen betrouwbare informatie halen om de graad van nauwkeurigheid te bepalen. Daarom zijn de de "bewijzen" van nauwkeurigheid die in sommige artikels staan over de hoeken en zijden van de piramides eigenlijk uit de lucht gegrepen.

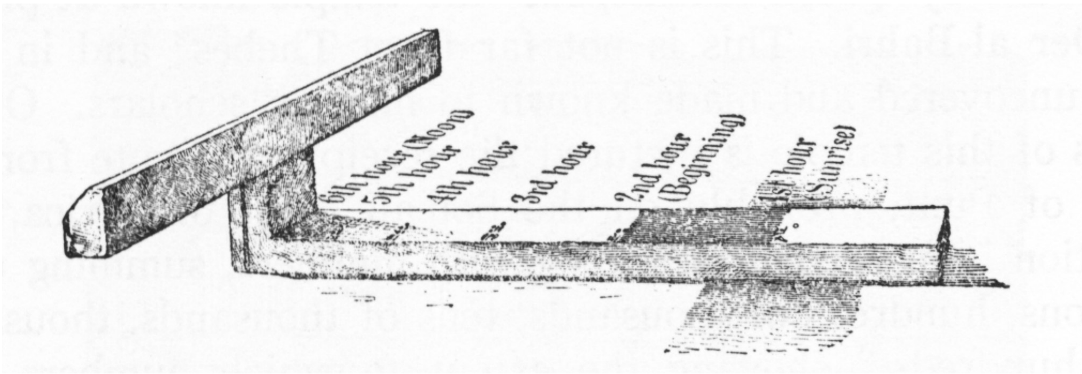
De sekhed laat toe de hoek van de opstaande vlakken van de piramides te controleren tijdens de bouw. De oriëntatie van de piramides werd bepaald met behulp van de merkhet en de sterrenhemel (zie **Hoofdstuk Sol**). Een afbeelding van de merkhet vind je in **Hoofdstuk Vanbeveren**.

We zagen al dat de oude Egyptenaren de tijd goed moesten bijhouden om overstromingen van de Nijl te kunnen voorspellen. De oudste gekende zonnewijzer dateert van ongeveer 1500 v.C. en werd gebouwd door de Egyptenaren. Dit instrument geeft het uur in functie van de lengte van een schaduw (zie figuur 17).

De schaduw van een voorwerp is lang bij zonsopgang, wordt steeds korter tot op het middaguur om daarna weer langer te worden. Er waren 6 uren voor de middag en 6 erna zodat een dag 12 uur duurde. Kortere tijdspannen werden volgens [10] ook gemeten met *waterklokken*. Dit zijn zandlopers met water in plaats van zand.

7 Vergelijking met de Babyloniërs

Omstreeks dezelfde periode als de oude Egyptische tijd, was er in Mesopotamië nog een andere beschaving die aan wiskunde deed: de *Babyloniërs*. Een vergeli-



Figuur 17: Egyptische zonnewijzer (1500 v.C.)

jking van deze twee beschavingen die weinig met elkaar in contact kwamen is dan ook aangewezen.

In tegenstelling tot wat velen denken, bereikte de Egyptische wiskunde nooit het niveau van de Babylonische wiskunde. De reden hiervoor is misschien dat Babylonië meer handel dreef omwille van haar ligging op de belangrijke routes van het Midden Oosten. Het was pas in de loop van de 20ste eeuw dat het niveau van de Babylonische wiskunde aan het licht kwam. Otto Neugebauer (1899–1990) begon in 1927 Babylonische tabletten te ontcijferen. Oorspronkelijk waren historici meer geïnteresseerd in de geschiedenis van Egypte omwille van de grote bouwwerken die zo goed bewaard bleven. De Babylonische geschriften daarentegen werden veel beter bewaard dan de Egyptische daar de Babyloniërs op kleitabletten schreven.

De oudste geschriften die we bezitten over meetkunde werden gevonden in Mesopotamië en dateren uit de Soemerische tijd (ongeveer 3000 v.C.). Vele concrete voorbeelden (net zoals bij de Egyptenaren nooit algemene theorieën) tonen dat de Babyloniërs omstreeks 2000 v.C. de oppervlakte van een rechthoek, rechthoekige en gelijkbenige driehoeken, … konden berekenen (Zie [5]). Wat nog veel belangrijker is, is dat men harde bewijzen (in gebakken klei) heeft voor het feit dat de Babyloniërs de stelling van Pythagoras kenden, meer dan 1000 jaar voor Pythagoras. Men vond kleitabletten met tabellen van zogenaamde *Pythagoreaanse tripels*. Dit zijn drietallen (x,y,z) waarvoor geldt $x^2+y^2=z^2$, voorbeelden zijn $(3,4,5)$, $(45,60,75)$, $(65,72,97)$, $(1771,2700,3229)$, …

Verder hadden de Babyloniërs kennis van: intrestberekening, analytische meetkunde, derdegraadsvergelijkingen, benaderingen van de vierkantswortelfunctie, …

8 Belang van Egypte in de latere geschiedenis van de wiskunde

Ook na de farao's bleef Egypte een belangrijk centrum voor kunst en wetenschap. Hierbij denken we vooral aan het museum van Alexandrië.

Alexander de Grote (356–323 v.C.), koning van Macedonië, was een groot veroveraar. Hij veroverde voor de Grieken onder andere (stukken van) Noord-Afrika, Sicilië, Zuid-Italië,... In Egypte stichtte hij in 332 v.C. Alexandrië. Na zijn dood werd Ptolemeus (niet de Ptolemeus van het geocentrisme!) gouverneur van Egypte. Dit was een periode van grote welvaart voor Egypte, zodat de bevolking niet in opstand kwam tegen de Griekse bezetter. Deze hoefde dan ook niet hard op te treden, zodat de cultuur niet werd uitgeroeid. Ptolemeus maakte van Alexandrië zelfs een wereldhaven en een centrum voor cultuur en wetenschap. Hij stichtte het *Museum van Alexandrië*, een soort centrum voor studie van vanalles, onder andere wiskunde (het woord "museum" betekent in feite "tempel van de muzen"). Dit museum trok veel Griekse geleerden aan. Enkele bekende namen zijn Euklides, Eratosthenes, Archimedes, Apollonius, ... Dit museum bezat een immense en waardevolle bibliotheek met ongeveer 700.000 manuscripten. In 641 n.C. werd Alexandrië veroverd door de Arabieren. Zij plunderden het museum en verbrandden vele boeken.

Referenties

[1] J.H. Conway and R.K. Guy, The Book of Numbers, Springer-Verlag, New York, 1996.

[2] J.L. Coolidge, A History of Geometrical Methods, Dover Publictions, Inc., New York, 1963.

[3] F. Daumas, La civilisation de l'Egypte pharaonique, B. Arthaud, Paris, 1967.

[4] H. Eves, An Introduction to the History of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[5] H. Eves, A survey of Geometry, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1972.

[6] R. Gantenbrink, Ascertaining and evaluating relevant structural points using the Cheops Pyramid as an example, 1999, `http://www.cheops.org`

[7] P. Gerdes, On culture, geometrical thinking and mathematics education, *Educational Studies in Mathematics* **19** (1988) 137–162.

[8] R.J. Gillings, Mathematics in the Time of the Pharaohs, Dover Publications, Inc., New York, 1982.

[9] J. Gray, Otto Neugebauer (b. 1899), EMS newsletter, December 1999.

[10] M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Volume 1, Oxford University Press, New York, 1972.

[11] J. Roelants, Een geometrische constructie van de piramide van Cheops 2800 BC, manuscript, 2000.

[12] A. Siliotti, De Piramiden van Egypte, Zuid Boekproducties, 1998.

[13] D.E. Smith, History of Mathematics, Volume 1, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

[14] W.W. Struve, "Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau," Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Part A, Vol. 1, Berlin, 1930.

[15] B.A. Turajeff, "The volume of the truncated pyramid in Egyptian mathematics," Ancient Egypt, p. 100, 1917.