

Examen Complexe Analyse Oefeningen

Het examen duurt 2u30. Enkel het gebruik van het formularium is toegestaan. Het gebruik van de theoriecursus, het oefeningenboek en een rekenmachine is niet toegelaten.
Begin elke oefening op een nieuw blad. Veel succes!

1. Los op:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{i}\operatorname{Log}\left(\sqrt{\frac{1+i}{1-i}}\right)\right) = ?$$
$$\sqrt[i]{i} = ?$$

2. Gegeven de volgende functie:

$$f(z) = \cos\left(\frac{2\pi z}{z-a}\right) \cdot \frac{z-4}{z-b}$$

Bepaal in onderstaande 3 gevallen de parameters $a, b \in \mathbb{R}$, zodat de functie $f(z)$

- a) juist 1 pool van orde 1 bezit.
- b) juist 1 essentiële singulariteit bezit.
- c) analytisch wordt voor $\forall z \in \mathbb{C}$.

Motiveer in elk van de gevallen je antwoord en bepaal het residu van $f(z)$ voor iedere singulariteit.

3. a) Splits de volgende functie in partieel breuken: $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x}$

b) Bepaal de volgende integraal via de complexe analyse:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} \cdot \sin(x) dx$$

4. a) Bepaal de Laplacegetransformeerde van $f(t) = \frac{\cosh(t) - 1}{t}$

b) Bepaal de inverse Laplacegetransformeerde van $F(p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Bgtg}(p)$

5. Een meteoriet stort neer in een zee op de planeet Gliese 581 c (die perfect sferisch wordt ondersteld). Deze zee heeft een ongekende chemische samenstelling. Metingen hebben aangetoond dat de voortplantingssnelheid van de meteoriet in zee omgekeerd evenredig is met \sqrt{y} waarbij y de diepte voorstelt. Als je weet dat de meteoriet de snelste weg volgt, bepaal dan zijn baan $x(y)$ in het zeewater. Op 3 tijdstippen werd de positie van de meteoriet gemeten: op de coördinaten $(2, 2)$ werd de impact van de meteoriet in zee geregistreerd; vervolgens ging de meteoriet door het punt $(1, 5/4)$ om tenslotte de bodem te bereiken op de coördinaten $(0, 1)$. Hierbij werd het coördinatenstelsel zodanig gekozen dat het punt $(0, 0)$ overeenkomt met het middelpunt van de planeet.