Formularium Complexe Analyse

Algemene formules

Complexe Getallen	Taylorreeksen
Voor $z = x + iy$ waarbij $x, y \in \mathbb{R}$: $$\begin{aligned} e^z &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \text{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \text{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \end{aligned}$$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ voor $\lvert z\rvert \leq 1$ $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ voor $\lvert z\rvert \leq 1$ $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ $\text{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ $\text{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$

Afschattingsregel

$$\boxed{\lvert\, \lvert a \rvert - \lvert b \rvert \,\rvert \leq \lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert \quad \forall a, b \in \mathbb{C}}$$

De complexe functie

$$f : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

is **differentieerbaar** in $z_o = x_o + iy_o$ als en slechts als

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ in } (x_o, y_o)$$

Deze voorwaarden heten de **Cauchy-Riemann** voorwaarden.
Men heeft dan

$$f'(z_o) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

f heet **analytisch** in $z_o \iff f$ is differentieerbaar in elk punt van een omgeving van z_0.

Parametrisatie van een lijnstuk $[a,b]$ waar $a,b \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z(t) &= a(1-t)+b.t \text{ met } t \in [0,1] \\ &= (b-a).t+a \end{aligned}$$

Indien f analytisch is over een enkelvoudig samenhangend gebied G dat begrensd is door de kromme C en indien a een inwendig punt is van G, dan geldt:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \qquad \text{en} \qquad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

waarbij C^+ de omloopszin is die G links laat liggen.

Machtreeksen

De **machtreeks**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \begin{array}{ll} \text{is convergent} & \text{als } \mid z-a \mid < R \\ \text{is divergent} & \text{als } \mid z-a \mid > R \end{array}$$

Hierbij is R de convergentiestraal die wordt gegeven door (indien de limiet bestaat)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Op de rand $\mid z-a \mid = R$ kan men zowel convergentie als divergentie hebben.

Als w_n een niet-stijgende rij is met limiet 0, dan zijn de reeksen

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin n\theta \;\text{ en }\; \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cos n\theta \qquad \theta \neq 2k\pi$$

convergent.

Laurentreeksen

De **Laurentreeks**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{is convergent voor} \quad R_2 < |\, z-a \,| < R_1$$

$$\text{is divergent voor} \quad |\, z-a \,| < R_2 \text{ en } |\, z-a \,| > R_1$$

Hierbij zijn de convergentiestralen:

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ R_2 &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{-n-1}}{a_{-n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{-n}}{a_{-n+1}} \right| \end{aligned}$$

Op de rand moet de convergentie apart bestudeerd worden.

Elke Laurentreeks kan geschreven worden als

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

De 'negatieve' reeks convergeert voor $R_2 < |\, z-a \,|$
De 'positieve' reeks convergeert voor $|\, z-a \,| < R_1$

Op de rand:
Voor $|\, z-a \,| = R_2$ moet enkel de convergentie van de negatieve reeks onderzocht worden.
Voor $|\, z-a \,| = R_1$ moet enkel de convergentie van de positieve reeks onderzocht worden.

Indien f analytisch is in $R_2 < |\, z-a \,| < R_1$, dan kan f geschreven worden als een Laurentreeks

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \qquad \text{voor } R_2 < |\, z-a \,| < R_1$$

De coëfficiënt van $(z-a)^{-1}$ noemt men het **residu** van f in a

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f,a)$$

Onderstel $a \in \mathbb{C}$ een **geïsoleerde** singulariteit van f, dit betekent dat de functie f analytisch is op een omgeving van a behalve in het punt a zelf. Dan gelden volgende equivalenties, op een omgeving van a:

$$\begin{aligned}
a \text{ is een } \textbf{ophefbare} \text{ singulariteit} &\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \\
&\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z) < \infty \\
a \text{ is een } \textbf{pool van orde N} &\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} a_n(z-a)^n \text{ met } a_{-N} \neq 0 \text{ voor } N > 0 \\
&\Leftrightarrow N = \min\{k \mid \lim_{z\to a} f(z)(z-a)^k < \infty\} \\
a \text{ is een } \textbf{essentiële} \text{ singulariteit} &\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \text{ zodat } a_{-n} \neq 0 \text{ voor } \infty \text{ veel } n \\
&\Leftarrow \nexists \lim_{z\to a} f(z) \quad \text{of} \quad \nexists k : \lim_{z\to a} f(z)(z-a)^k < \infty
\end{aligned}$$

De residustelling

Als G een enkelvoudig samenhangend gebied is, en f is analytisch over G behalve in geïsoleerde singuliere punten, en C is een gesloten kromme in G, dan is

$$\oint_{C^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_a \text{Res}(f,a)$$

waarbij de som loopt over alle singuliere punten binnen C.

- Indien a een **ophefbare** singulariteit is, dan is $Res(f,a) = 0$.
- Indien a een **pool** is van orde N, dan is

$$\text{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} (f(z)(z-a)^N)$$

- Indien a een **essentiële** singulariteit is, dan kan het residu enkel bepaald worden via de Laurentreeks.

Reeksen berekenen via de residustelling

Onderstel dat C_n het vierkant is met hoekpunten $(n+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$.
Dan geldt: $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sup\{\mid \text{cotg}\, \pi z \mid : z \in C_n\} \leq M$$

$$\sup\{\mid \text{cosec}\, \pi z \mid : z \in C_n\} \leq M$$

Onderstel dat de functie f continu is op de kromme Γ en $\exists\, M$ zodat $|f| \leq M$, dan geldt:

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq M.\ell(\Gamma)$$

waarbij $\ell(\Gamma)$ de lengte van de kromme Γ is.

Werkwijze: $\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = ?$

1. Beschouw de integraal $I_n = \begin{cases} \oint_{C_n} \operatorname{cosec} \pi z\, f(z)dz & \text{voor de alternerende reeks} \\ \\ \oint_{C_n} \operatorname{cotg} \pi z\, f(z)dz & \text{voor de niet-alternerende reeks} \end{cases}$
2. Ga de voorwaarden van eigenschap 2 na:
   - De functie $\operatorname{cotg} \pi z\, f(z)$ of $\operatorname{cosec} \pi z\, f(z)$ is continu op het vierkant $C_n, \forall n$.
   - Bepaal een bovengrens voor $|\operatorname{cotg} \pi z\, f(z)|$ of $|\operatorname{cosec} \pi z\, f(z)|$ op het vierkant C_n.
3. Toon aan via eigenschap 1 en 2 dat $|I_n| \longrightarrow 0$ voor $n \longrightarrow \infty$.
4. Bereken de integraal I_n via de residustelling.
5. Bepaal uit stap 3 en 4 de gevraagde reeks.

Integratie van reële rationale functies van $\sin\theta$ en $\cos\theta$ tussen 0 en 2π

Een integraal van de vorm

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$$

herleidt zich tot een integraal langs de eenheidscirkel in het complexe vlak door de substitutie

$$z = e^{i\theta}$$

De integraal kan vervolgens met de residustelling worden uitgerekend.

Integratie van rationale functies tussen $-\infty$ en $+\infty$

Een integraal van de vorm

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

waarbij $P,\ Q \in \mathbb{R}[X]$ met

- $Q(x)$ geen reële nulpunten
- gr $Q(x)-$ gr $P(x) \geq 2$
- $P(x)$ en $Q(x)$ geen gemeenschappelijke factoren

kan worden uitgerekend aan de hand van de residustelling.

Integratie van rationale functies vermenigvuldigd met e^{imx}

Een integraal van de vorm

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx$$

waarbij m>0 en $P,\ Q \in \mathbb{R}[X]$ met

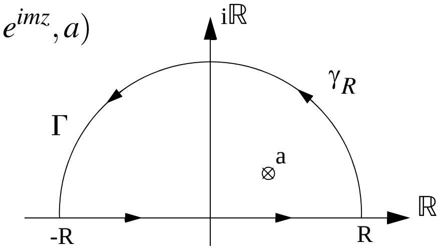
- gr $P(x) <$ gr $Q(x)$
- $P(x)$ en $Q(x)$ geen gemeenschappelijke factoren

kan opgelost worden met behulp van de residustelling.

Werkwijze:

1. Beschouw $I_0 = \oint_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz$

2. Bereken I_0 met de residustelling: $I_0 = 2\pi i \sum_a \text{Res}(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz}, a)$

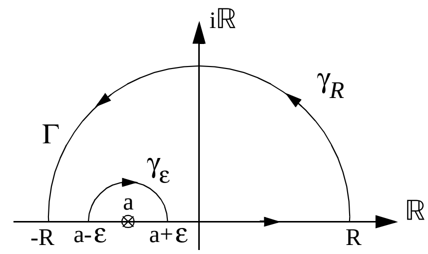


3. Herschrijf I_0.

   - Geval 1: $Q(z)$ heeft geen reële nulpunten

     Neem de limiet voor R $\to\infty$ van

     $$I_0 = \int_{-R}^{R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz + \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz$$



   - Geval 2: $Q(z)$ heeft reële nulpunten

     Neem de limiet voor R $\to\infty$ en r $\to 0$ van

     $$I_0 = \int_{-R}^{a_i-\varepsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz + \int_{a_i+\varepsilon}^{R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz + \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz$$

4. Bepaal hieruit de gevraagde integraal $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz} dz$

De Laplace transformatie

De **Laplacegetransformeerde** van de reële functie $f:\ [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : t \longrightarrow f(t)$
is de functie $F(p)$ gedefinieerd door

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

Hierbij is $p = x + iy$ een complexe parameter. Men noteert : $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Eigenschappen van Laplacegetransformeerden

In de volgende eigenschappen zijn alle functies $f(t)$ stuksgewijze continu en van exponentiële orde α en $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ voor Re$p > \alpha$.

1. **Lineariteit**
   $\mathcal{L}\{af_1(t)+bf_2(t)\} = a\mathcal{L}\{f_1(t)\}+b\mathcal{L}\{f_2(t)\} \qquad \mathrm{Re}p > \max(\alpha_1, \alpha_2)$

2. **Verandering van schaal**
   $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \qquad \mathrm{Re}p > a\alpha, a > 0$

3. **Vermenigvuldiging met e^{at}**

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(p-a) \qquad \mathrm{Re}p > a+\alpha$$

4. **Vermenigvuldiging met t^n**

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p) \qquad \mathrm{Re}p > \alpha$$

5. **Verschuiving**
   Beschouw de functie $f_a(t), a > 0$ die men als volgt definieert:

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < a \\ f(t-a) & \text{als } t \geq a \end{cases}$$

   Dan hebben we dat

$$\mathcal{L}\{f_a(t)\} = e^{-ap}F(p) \qquad \mathrm{Re}p > \alpha$$

6. **Transformatie van de afgeleide**
   Als f continu is voor $t > 0$ en rechtscontinu in $t = 0$ en f' is stuksgewijs continu, dan geldt

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0) \qquad \mathrm{Re}p > \alpha$$

7. **Transformatie van de n-de afgeleide**
   Als $f^{(n-1)}$ continu is voor $t > 0$ en rechtscontinu in $t = 0$, $f^{(n)}$ is stuksgewijs continu en $f^{(i)}(t) = \mathrm{O}(e^{\alpha t})$ voor $i = 0, 1, \ldots, n-1$ dan geldt

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \qquad \mathrm{Re}p > \alpha$$

8. **Transformatie van de integraal**
   Als $g(t) = \int_0^t f(x)dx$, dan is

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{p}F(p) \qquad \mathrm{Re}p > \alpha > 0$$

9. **Transformatie van een periodieke functie**
   Als f een periodieke functie is met periode T, dan is

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt \qquad \mathrm{Re}p > 0$$

10. Als p reëel is dan geldt

$$\lim_{p \to +\infty} \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

11. Onderstel dat p reëel is en dat $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{f(t)}{t}$ bestaat, dan bestaat $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}$ en

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(x)dx, \quad p > \alpha$$

$f(t)$	$F(p)$	convergentieabscis α (a, b, k zijn reëel)
1	$\dfrac{1}{p}$	0
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	a
$t^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	0
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	a
$\sin kt$	$\dfrac{k}{p^2+k^2}$	0
$\cos kt$	$\dfrac{p}{p^2+k^2}$	0
$\operatorname{sh} kt$	$\dfrac{k}{p^2-k^2}$	$\lvert k \rvert$
$\operatorname{ch} kt$	$\dfrac{p}{p^2-k^2}$	$\lvert k \rvert$
$e^{-at} \sin kt$	$\dfrac{k}{(p+a)^2+k^2}$	$-a$
$e^{-at} \cos kt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+k^2}$	$-a$
$\dfrac{\sin kt - kt \cos kt}{2k^3}$	$\dfrac{1}{(p^2+k^2)^2}$	0
$\dfrac{t \sin kt}{2k}$	$\dfrac{p}{(p^2+k^2)^2}$	0
$\dfrac{(3-k^2t^2)\sin kt - 3kt \cos kt}{8k^5}$	$\dfrac{1}{(p^2+k^2)^3}$	0

$f(t)$	$F(p)$	convergentieabscis α (a, b, k zijn reëel)
$\dfrac{t\sin kt - kt^2\cos kt}{8k^3}$	$\dfrac{p}{(p^2+k^2)^3}$	0
$\dfrac{1}{a}\sin at - \dfrac{1}{b}\sin bt$	$\dfrac{b^2-a^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	0
$\cos at - \cos bt$	$\dfrac{(b^2-a^2)\,p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	0
$e^{at} - e^{bt} \quad (a > b)$	$\dfrac{a-b}{(p-a)(p-b)}$	a
$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p^3}}$	0
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$	0
$t^k \quad (k > -1)$	$\dfrac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$	0
$t^k e^{at} \quad (k > -1)$	$\dfrac{\Gamma(k+1)}{(p-a)^{k+1}}$	a

De inverse Laplacetransformatie

Als $F(p)$ de Laplacegetransformeerde is van $f(t)$, dan zeggen we dat $f(t)$ de **inverse getransformeerde** is van $F(p)$.
We noteren:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$$

Hoe kan men $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ bepalen?

1. **Via de elementaire methode**
2. **Door splitsing in partiële breuken als $F(p)$ een rationale functie is van p**
3. **Als toepassing van de inversiestelling**

   Als $F(p) = \dfrac{T(p)}{N(p)}$ een rationale functie is, waarbij graad $T(p) \leq$ graad $N(p)$, dan geldt

   $$f(t) = \sum_a \operatorname{Res}\left(F(p)e^{pt}, a\right)$$

Convolutie-integraal

De convolutie van twee functies $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is per definitie gegeven door de integraal

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

indien deze bestaat.
Op het domein waar deze integraal convergeert, geldt volgende nuttige eigenschap:

$$\mathcal{L}\{f*g\}=\mathcal{L}(f).\mathcal{L}(g)$$

Limiet van een som

Zij $f(t)$ een stuksgewijs continue functie van exponentiële orde α. Indien $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$, dan

$$\begin{array}{lll}
(i) & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F(n)=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{1-\exp(-t)}dt & \text{voor } \alpha\leq 0 \\
(ii) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F(n)=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{\exp(t)-1}dt & \text{voor } \alpha\leq 1 \\
(iii) & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F(n)(-1)^n=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{1+\exp(-t)}dt & \text{voor } \alpha\leq 0 \\
(iv) & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F(n)(-1)^{n-1}=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{\exp(t)+1}dt & \text{voor } \alpha\leq 1
\end{array}$$

Variatierekening zonder nevenvoorwaarden

- **in 2 dimensies:** $$I=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx$$

Een nodige voorwaarde opdat de functionaal $I=\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx$ extreem wordt voor de kromme $y=y(x)$ is dat de kromme voldoet aan de vergelijking van Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

De oplossing van deze vergelijking $y(x)$ noemen we de extremaal van de functionaal I.

- f is onafhankelijk van y: $$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y')dx$$

  De Euler-Lagrange vergelijking wordt dan: $$\frac{\partial f}{\partial y'} = c$$

- f is onafhankelijk van x: $$I = \int_{x_0}^{x_1} f(y, y')dx$$

  De Euler-Lagrange vergelijking wordt dan: $$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = c$$

- **in 3 dimensies:** $$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')dx$$

De extremaal $y(x)$, $z(x)$ van de functionaal $I = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')dx$ is de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z'}\right) \end{cases}$$

Variatierekening met nevenvoorwaarden

- **in 3 dimensies:** $$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')dx \quad \text{met} \quad g(x, y, z) = 0$$

De extremaal $y(x)$, $z(x)$ van de functionaal $I = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z')dx$ die voldoet aan de bijkomende voorwaarde $g(x, y, z) = 0$, is de oplossing van de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

Dit is de vergelijking van Euler-Lagrange voor het variatieprobleem met nevenvoorwaarden.

Isoperimetrische vraagstukken

Bepaal de kromme $y(x)$ die de functionaal $I = \int f(x,y,y')dx$ extreem maakt onder de voorwaarde dat $\int g(x,y,y')dx = \ell$.

Dit isoperimetrisch vraagstuk wordt opgelost via de methode van de multiplicatoren van Lagrange. Hierbij zoeken we de extremaal $y(x,\lambda)$ van de hulpfunctionaal H:

$$H = \int [f(x,y,y') + \lambda g(x,y,y')]dx$$

De parameter λ wordt bepaald door $y(x,\lambda)$ in te vullen in $\int g(x,y,y')dx = \ell$.