Il preantipode ed il Teorema Fondamentale di Struttura per i quasi-bimoduli di Hopf

Paolo Saracco

Università degli Studi di Torino

1 Agosto 2014

Introduzione - I moduli di Hopf

Sia $(\mathcal{M}, \otimes, \Bbbk, a, l, r)$ la categoria monoidale degli spazi vettoriali a coefficienti su un campo $\Bbbk$ e sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra in $\mathcal{M}$.

Proposizione

(H, Δ, ε) è una coalgebra nella categoria $(\mathcal{M}_H, \otimes, \Bbbk, a, l, r)$ degli H-moduli destri.

La categoria degli *H-moduli (destri) di Hopf* è la categoria dei comoduli sulla coalgebra H in $\mathcal{M}_H$: $\mathcal{M}_H^H := (\mathcal{M}_H)^H$

Teorema

Sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra e sia $M^{\mathrm{Co}H} := \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}$ lo spazio dei coinvarianti di $M \in \mathcal{M}_H^H$. Le assegnazioni:

$$L \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}_H^H \colon V \mapsto V \otimes H_\bullet^\bullet \quad \text{e} \quad R \colon \mathcal{M}_H^H \to \mathcal{M} \colon M \mapsto M^{\mathrm{Co}H}$$

definiscono un'aggiunzione $(L, R) \colon \mathcal{M} \rightharpoonup \mathcal{M}_H^H$ con unità e counità:

$$\eta_V \colon V \to (V \otimes H)^{\mathrm{Co}H} \colon v \mapsto v \otimes 1 \quad \text{e} \quad \epsilon_M \colon M^{\mathrm{Co}H} \otimes H \to M \colon m \otimes h \mapsto m \cdot h$$

per ogni $V \in \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{M}_H^H$. Inoltre η è un isomorfismo naturale.

Introduzione - I moduli di Hopf

Sia $(\mathcal{M}, \otimes, \Bbbk, a, l, r)$ la categoria monoidale degli spazi vettoriali a coefficienti su un campo $\Bbbk$ e sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra in $\mathcal{M}$.

Proposizione

(H, Δ, ε) è una coalgebra nella categoria $(\mathcal{M}_H, \otimes, \Bbbk, a, l, r)$ degli H-moduli destri.

La categoria degli *H*-moduli (destri) di Hopf è la categoria dei comoduli sulla coalgebra H in $\mathcal{M}_H$: $\mathcal{M}_H^H := (\mathcal{M}_H)^H$

Teorema

Sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra e sia $M^{\mathrm{Co}H} := \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}$ lo spazio dei coinvarianti di $M \in \mathcal{M}_H^H$. Le assegnazioni:

$$L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_H^H : V \mapsto V \otimes H_\bullet^\bullet \quad \text{e} \quad R : \mathcal{M}_H^H \to \mathcal{M} : M \mapsto M^{\mathrm{Co}H}$$

definiscono un'aggiunzione $(L, R) : \mathcal{M} \rightharpoonup \mathcal{M}_H^H$ con unità e counità:

$$\eta_V : V \to (V \otimes H)^{\mathrm{Co}H} : v \mapsto v \otimes 1 \quad \text{e} \quad \epsilon_M : M^{\mathrm{Co}H} \otimes H \to M : m \otimes h \mapsto m \cdot h$$

per ogni $V \in \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{M}_H^H$. Inoltre η è un isomorfismo naturale.

Introduzione - I moduli di Hopf

Sia $(\mathcal{M}, \otimes, \Bbbk, a, l, r)$ la categoria monoidale degli spazi vettoriali a coefficienti su un campo $\Bbbk$ e sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra in $\mathcal{M}$.

Proposizione

(H, Δ, ε) è una coalgebra nella categoria $(\mathcal{M}_H, \otimes, \Bbbk, a, l, r)$ degli H-moduli destri.

La categoria degli H-moduli (destri) di Hopf è la categoria dei comoduli sulla coalgebra H in $\mathcal{M}_H$: $\mathcal{M}_H^H := (\mathcal{M}_H)^H$

Teorema

Sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra e sia $M^{\mathrm{Co}H} := \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}$ lo spazio dei coinvarianti di $M \in \mathcal{M}_H^H$. Le assegnazioni:

$$L\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}_H^H\colon V \mapsto V \otimes H_\bullet^\bullet \quad \text{e} \quad R\colon \mathcal{M}_H^H \to \mathcal{M}\colon M \mapsto M^{\mathrm{Co}H}$$

definiscono un'aggiunzione $(L, R)\colon \mathcal{M} \rightharpoonup \mathcal{M}_H^H$ con unità e counità:

$$\eta_V\colon V \to (V \otimes H)^{\mathrm{Co}H}\colon v \mapsto v \otimes 1 \quad \text{e} \quad \epsilon_M\colon M^{\mathrm{Co}H} \otimes H \to M\colon m \otimes h \mapsto m \cdot h$$

per ogni $V \in \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{M}_H^H$. Inoltre η è un isomorfismo naturale.

Introduzione - Il Teorema di Struttura per i moduli di Hopf

Teorema (di Struttura per moduli di Hopf [Larson e Sweedler, 1969])

Sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra. TFAE:

- *H è un'algebra di Hopf con antipode s;*
- *la counità dell'aggiunzione (L, R, η, ϵ) è un isomorfismo naturale.*

Cenno di dimostrazione.

Si consideri la proiezione:

$$\tau_M \colon M \to M^{\mathrm{Co}H} \colon m \mapsto m_0 \cdot s(m_1)$$

Si dimostra che

$$\psi_M := (\tau_M \otimes H) \circ \rho_M$$

è l'inversa di ϵ_M, $\forall\, M \in \mathcal{M}_H^H$. $\square$

Introduzione - Il Teorema di Struttura per i moduli di Hopf

Teorema (di Struttura per moduli di Hopf [Larson e Sweedler, 1969])

Sia $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una bialgebra. TFAE:

- *H è un'algebra di Hopf con antipode s;*
- *la counità dell'aggiunzione (L, R, η, ϵ) è un isomorfismo naturale.*

Cenno di dimostrazione.

Si consideri la proiezione:

$$\tau_M \colon M \to M^{\mathrm{Co}H} \colon m \mapsto m_0 \cdot s(m_1)$$

Si dimostra che

$$\psi_M := (\tau_M \otimes H) \circ \rho_M$$

è l'inversa di ϵ_M, $\forall\, M \in \mathcal{M}_H^H$. $\square$

Quasi-bialgebre

B quasi-Hopf $\Rightarrow$ $N \cong N^{\mathrm{Co}B} \otimes B$

$\forall\, N$ quasi-Hopf Bimod-B

Bialgebre

H Hopf $\iff$ $M \cong M^{\mathrm{Co}H} \otimes H$

$\forall\, M$ Hopf Mod-H

Quasi-bialgebre

B quasi-Hopf $\quad \Rightarrow \quad N \cong N^{\mathrm{Co}B} \otimes B$

$\forall\, N$ quasi-Hopf Bimod-B

Bialgebre

H Hopf $\iff$ $M \cong M^{\mathrm{Co}H} \otimes H$

$\forall\, M$ Hopf Mod-H

Definizione (Quasi-bialgebra [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è il dato di:

- Una $\Bbbk$-algebra associativa e unitaria (A, m, u).
- Due morfismi di algebre $\Delta \colon A \to A \otimes A$ e $\varepsilon \colon A \to \Bbbk$.
- Un elemento invertibile $\Phi \in A \otimes A \otimes A$, il riassociatore, che soddisfa:

$$(A \otimes A \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes A \otimes A)(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (A \otimes \Delta \otimes A)(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1),$$
$$(A \otimes \varepsilon \otimes A)(\Phi) = 1 \otimes 1.$$

tali che Δ sia quasi-coassociativo e counitario con counità ε:

$$\Phi \cdot ((\Delta \otimes A) \circ \Delta) = ((A \otimes \Delta) \circ \Delta) \cdot \Phi,$$
$$(\varepsilon \otimes A) \circ \Delta = \mathrm{Id}_A = (A \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

Definizione (Quasi-bialgebra [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ è il dato di:

- Una $\Bbbk$-algebra associativa e unitaria (A, m, u).
- Due morfismi di algebre $\Delta\colon A \to A \otimes A$ e $\varepsilon\colon A \to \Bbbk$.
- Un elemento invertibile $\Phi \in A \otimes A \otimes A$, il riassociatore, che soddisfa:

$$(A \otimes A \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes A \otimes A)(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (A \otimes \Delta \otimes A)(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1),$$
$$(A \otimes \varepsilon \otimes A)(\Phi) = 1 \otimes 1.$$

tali che Δ sia quasi-coassociativo e counitario con counità ε:

$$\Phi \cdot ((\Delta \otimes A) \circ \Delta) = ((A \otimes \Delta) \circ \Delta) \cdot \Phi,$$
$$(\varepsilon \otimes A) \circ \Delta = \mathrm{Id}_A = (A \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

Introduzione - Quasi-bimoduli di Hopf

$A := (A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ quasi-bialgebra.

Proposizione

Le categorie di A-moduli ${}_A\mathcal{M}$ (sinistri) e $\mathcal{M}_A$ (destri) sono monoidali. In particolare, la categoria ${}_A\mathcal{M}_A$ (A-bimoduli) è monoidale, con funtore tensore $\otimes$, oggetto unità $\Bbbk$ e associativity constraint dato da:

$$ {}_A\alpha_A((m \otimes n) \otimes p) = \Phi \cdot (m \otimes (n \otimes p)) \cdot \Phi^{-1} $$

$\forall\, m \in M,\ n \in N,\ p \in P$, *A-bimoduli.*

Proposizione

(A, m, m) *è A-bimodulo e* (A, Δ, ε) *è coalgebra coassociativa in* ${}_A\mathcal{M}_A$.

Definizione (Quasi-bimoduli di Hopf [Hausser e Nill, 1999])

La categoria dei quasi-bimoduli di Hopf su A è ${}_A\mathcal{M}_A^A := ({}_A\mathcal{M}_A)^A$.

Introduzione - Quasi-bimoduli di Hopf

$A := (A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ quasi-bialgebra.

Proposizione

Le categorie di A-moduli ${}_A\mathcal{M}$ (sinistri) e $\mathcal{M}_A$ (destri) sono monoidali. In particolare, la categoria ${}_A\mathcal{M}_A$ (A-bimoduli) è monoidale, con funtore tensore $\otimes$, oggetto unità $\Bbbk$ e associativity constraint dato da:

$$ {}_A\alpha_A((m \otimes n) \otimes p) = \Phi \cdot (m \otimes (n \otimes p)) \cdot \Phi^{-1} $$

$\forall\, m \in M,\ n \in N,\ p \in P$, A-bimoduli.

Proposizione

(A, m, m) è A-bimodulo e (A, Δ, ε) è coalgebra coassociativa in ${}_A\mathcal{M}_A$.

Definizione (Quasi-bimoduli di Hopf [Hausser e Nill, 1999])

La categoria dei quasi-bimoduli di Hopf su A è ${}_A\mathcal{M}_A^A := ({}_A\mathcal{M}_A)^A$.

Introduzione - Quasi-bimoduli di Hopf

$A := (A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ quasi-bialgebra.

Proposizione

Le categorie di A-moduli ${}_A\mathcal{M}$ (sinistri) e $\mathcal{M}_A$ (destri) sono monoidali. In particolare, la categoria ${}_A\mathcal{M}_A$ (A-bimoduli) è monoidale, con funtore tensore $\otimes$, oggetto unità $\Bbbk$ e associativity constraint dato da:

$${}_A\alpha_A((m \otimes n) \otimes p) = \Phi \cdot (m \otimes (n \otimes p)) \cdot \Phi^{-1}$$

$\forall\, m \in M,\ n \in N,\ p \in P,$ A-bimoduli.

Proposizione

(A, m, m) è A-bimodulo e (A, Δ, ε) è coalgebra coassociativa in ${}_A\mathcal{M}_A$.

Definizione (Quasi-bimoduli di Hopf [Hausser e Nill, 1999])

La categoria dei quasi-bimoduli di Hopf su A è ${}_A\mathcal{M}_A^A := ({}_A\mathcal{M}_A)^A$.

Introduzione - Quasi-algebre di Hopf

Definizione (Quasi-algebra di Hopf [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ si dice quasi-algebra di Hopf se ammette un antiendomorfismo s e due elementi privilegiati α e β tali che:

$$s(a_1)\alpha a_2 = \alpha\,\varepsilon(a) \qquad a_1\beta s(a_2) = \beta\,\varepsilon(a)$$

$$\Phi^1\beta s(\Phi^2)\alpha\Phi^3 = 1 \qquad s(\phi^1)\alpha\phi^2\beta s(\phi^3) = 1$$

La terna (s, α, β) prende il nome di quasi-antipode.

Teorema (Hausser e Nill, 1999)

Sia $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ una quasi-algebra di Hopf con s invertibile e sia M un quasi-bimodulo di Hopf su H. Definiamo, per ogni $m \in M$ e $a \in H$,

$$E(m) := \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s\left(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1\right), \quad a \triangleright m := E(a \cdot m), \quad M^{\mathrm{CoH}} := E(M)$$

e dotiamo M^{CoH} di struttura di H-modulo sinistro mediante $\triangleright$. Allora:

$$\nu \colon M^{\mathrm{CoH}} \otimes H \to M \colon m \otimes h \mapsto m \cdot h$$

è un isomorfismo di quasi-bimoduli di Hopf con inversa: $\nu^{-1}(m) = E(m_0) \otimes m_1$.

Introduzione - Quasi-algebre di Hopf

Definizione (Quasi-algebra di Hopf [Drinfel'd, 1989])

Una quasi-bialgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ si dice quasi-algebra di Hopf se ammette un antiendomorfismo s e due elementi privilegiati α e β tali che:

$$s(a_1)\alpha a_2 = \alpha\,\varepsilon(a) \qquad a_1\beta s(a_2) = \beta\,\varepsilon(a)$$

$$\Phi^1\beta s(\Phi^2)\alpha\Phi^3 = 1 \qquad s(\phi^1)\alpha\phi^2\beta s(\phi^3) = 1$$

La terna (s, α, β) prende il nome di quasi-antipode.

Teorema (Hausser e Nill, 1999)

Sia $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ una quasi-algebra di Hopf con s invertibile e sia M un quasi-bimodulo di Hopf su H. Definiamo, per ogni $m \in M$ e $a \in H$,

$$E(m) := \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s\left(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1\right), \quad a \triangleright m := E(a \cdot m), \quad M^{\mathrm{Co}H} := E(M)$$

e dotiamo $M^{\mathrm{Co}H}$ di struttura di H-modulo sinistro mediante $\triangleright$. Allora:

$$\nu\colon M^{\mathrm{Co}H} \otimes H \to M\colon m \otimes h \mapsto m \cdot h$$

è un isomorfismo di quasi-bimoduli di Hopf con inversa: $\nu^{-1}(m) = E(m_0) \otimes m_1$.

Quasi-bialgebre

B quasi-Hopf $\quad \Rightarrow \quad N \cong N^{\mathrm{Co}B} \otimes B$

$\forall\, N$ quasi-Hopf Bimod-B

Bialgebre

H Hopf $\iff M \cong M^{\mathrm{Co}H} \otimes H$

$\forall\, M$ Hopf Mod-H

Un'aggiunzione tra ${}_A\mathcal{M}_A^A$ e ${}_A\mathcal{M}$

Sia $A^+ := \ker(\varepsilon)$ l'*augmentation ideal* di A e sia $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$. Denotiamo con $\overline{M} := \frac{M}{MA^+} \in {}_A\mathcal{M}$ il quoziente di M per l'A-sottomodulo sinistro MA^+.

Teorema

Dati i funtori

$$F\colon {}_A\mathcal{M}_A^A \to {}_A\mathcal{M}\colon {}_\bullet M_\bullet^\bullet \mapsto {}_\bullet\overline{M} \qquad \text{e} \qquad G\colon {}_A\mathcal{M} \to {}_A\mathcal{M}_A^A\colon {}_\bullet N \mapsto {}_\bullet N \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet$$

si ha che F è aggiunto sinistro a G. Unità e counità sono date da:

$$\eta_M\colon M \to \overline{M} \otimes A\colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1 \quad \text{e} \quad \epsilon_N\colon \overline{N \otimes A} \to N\colon \overline{n \otimes a} \mapsto n\,\varepsilon(a).$$

$\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A, N \in {}_A\mathcal{M}$. Inoltre ϵ è un isomorfismo naturale.

Teorema (di Equivalenza)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. *(F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie;*
2. *Per ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, esiste una trasformazione lineare $\tilde{\tau}\colon \overline{M} \to M$ tale che:*
   (i) $\mu_M \circ (\tilde{\tau} \otimes A) \circ \eta_M = Id_M \quad (\iff \tilde{\tau}(\overline{m_0}) \cdot m_1 = m, \forall\, m \in M)$
   (ii) $\eta_M \circ \tilde{\tau} = (\overline{M} \otimes u) \circ r_{\overline{M}}^{-1} \quad (\iff \tilde{\tau}(\overline{m})_0 \otimes \tilde{\tau}(\overline{m})_1 = \overline{m} \otimes 1, \forall\, m \in M)$

Un'aggiunzione tra ${}_A\mathcal{M}_A^A$ e ${}_A\mathcal{M}$

Sia $A^+ := \ker(\varepsilon)$ l'*augmentation ideal* di A e sia $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$. Denotiamo con $\overline{M} := \frac{M}{MA^+} \in {}_A\mathcal{M}$ il quoziente di M per l'A-sottomodulo sinistro MA^+.

Teorema

Dati i funtori

$$F\colon {}_A\mathcal{M}_A^A \to {}_A\mathcal{M}\colon {}_\bullet M_\bullet^\bullet \mapsto {}_\bullet\overline{M} \qquad \text{e} \qquad G\colon {}_A\mathcal{M} \to {}_A\mathcal{M}_A^A\colon {}_\bullet N \mapsto {}_\bullet N \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet$$

si ha che F è aggiunto sinistro a G. Unità e counità sono date da:

$$\eta_M\colon M \to \overline{M} \otimes A\colon m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1 \quad \text{e} \quad \epsilon_N\colon \overline{N \otimes A} \to N\colon \overline{n \otimes a} \mapsto n\,\varepsilon(a).$$

$\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A, N \in {}_A\mathcal{M}$. *Inoltre ϵ è un isomorfismo naturale.*

Teorema (di Equivalenza)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. *(F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie;*
2. *Per ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, esiste una trasformazione lineare $\tilde{\tau}\colon \overline{M} \to M$ tale che:*
   - (i) $\mu_M \circ (\tilde{\tau} \otimes A) \circ \eta_M = Id_M \quad (\iff \quad \tilde{\tau}(\overline{m_0}) \cdot m_1 = m, \forall\, m \in M)$
   - (ii) $\eta_M \circ \tilde{\tau} = (\overline{M} \otimes u) \circ r_{\overline{M}}^{-1} \quad (\iff \quad \tilde{\tau}(\overline{m})_0 \otimes \tilde{\tau}(\overline{m})_1 = \overline{m} \otimes 1, \forall\, m \in M)$

Un'aggiunzione tra ${}_A\mathcal{M}_A^A$ e ${}_A\mathcal{M}$

Sia $A^+ := \ker(\varepsilon)$ l'*augmentation ideal* di A e sia $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$. Denotiamo con $\overline{M} := \frac{M}{MA^+} \in {}_A\mathcal{M}$ il quoziente di M per l'A-sottomodulo sinistro MA^+.

Teorema

Dati i funtori

$$F : {}_A\mathcal{M}_A^A \to {}_A\mathcal{M} : \bullet M^{\bullet}_{\bullet} \mapsto \bullet\overline{M} \qquad \text{e} \qquad G : {}_A\mathcal{M} \to {}_A\mathcal{M}_A^A : \bullet N \mapsto \bullet N \otimes \bullet A^{\bullet}_{\bullet}$$

si ha che F è aggiunto sinistro a G. Unità e counità sono date da:

$$\eta_M : M \to \overline{M} \otimes A : m \mapsto \overline{m_0} \otimes m_1 \quad \text{e} \quad \epsilon_N : \overline{N \otimes A} \to N : \overline{n \otimes a} \mapsto n\,\varepsilon(a).$$

$\forall\, M \in {}_A\mathcal{M}_A^A, N \in {}_A\mathcal{M}$. *Inoltre ϵ è un isomorfismo naturale.*

Teorema (di Equivalenza)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. *(F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie;*
2. *Per ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, esiste una trasformazione lineare $\tilde{\tau} : \overline{M} \to M$ tale che:*

   (i) $\mu_M \circ (\tilde{\tau} \otimes A) \circ \eta_M = Id_M \quad (\iff \underline{\tilde{\tau}(\overline{m_0})} \cdot m_1 = m, \forall\, m \in M)$

   (ii) $\eta_M \circ \tilde{\tau} = (\overline{M} \otimes u) \circ r_{\overline{M}}^{-1} \quad (\iff \tilde{\tau}(\overline{m})_0 \otimes \tilde{\tau}(\overline{m})_1 = \overline{m} \otimes 1, \forall\, m \in M)$

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra A è una trasformazione lineare $S\colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b),\ \forall\, a, b \in A;\ \overset{a=1}{\rightsquigarrow}\ b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b),\ \forall\, a, b \in A;$

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M\colon M \to M\colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M\colon \overline{M} \to M$ data da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra A è una trasformazione lineare $S\colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b), \ \forall\, a, b \in A$; $\overset{a=1}{\rightsquigarrow}$ $b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b), \ \forall\, a, b \in A$;

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M\colon M \to M\colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M\colon \overline{M} \to M$ data da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra A è una trasformazione lineare $S\colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b)$, $\forall\, a, b \in A$; $\overset{a=1}{\rightsquigarrow}$ $b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b)$, $\forall\, a, b \in A$;

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M\colon M \to M\colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M\colon \overline{M} \to M$ data da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra A è una trasformazione lineare $S\colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b)$, $\forall\, a, b \in A$; $\overset{a=1}{\rightsquigarrow}$ $b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b)$, $\forall\, a, b \in A$;

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M\colon M \to M\colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M\colon \overline{M} \to M$ data da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

Il preantipode

Definizione (Preantipode)

Un preantipode per una quasi-bialgebra A è una trasformazione lineare $S\colon A \to A$ che soddisfa:

(P1) $b_1 S(ab_2) = S(a)\varepsilon(b)$, $\forall\, a, b \in A$; $\overset{a=1}{\leadsto}$ $b_1 S(b_2) = S(1)\varepsilon(b)$

(P2) $S(a_1 b)a_2 = \varepsilon(a)S(b)$, $\forall\, a, b \in A$;

(P3) $\Phi^1 S(\Phi^2)\Phi^3 = 1$, dove $\Phi = \Phi^1 \otimes \Phi^2 \otimes \Phi^3$.

Se S è un preantipode per A e $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$, allora l'applicazione:

$$\tau_M\colon M \to M\colon m \mapsto \Phi^1 \cdot m_0 \cdot S(\Phi^2 m_1)\Phi^3$$

soddisfa $\tau_M(m \cdot a) = \tau_M(m)\,\varepsilon(a)$. In particolare passa al quoziente $\overline{M}$.

Teorema

La trasformazione lineare $\widetilde{\tau}_M\colon \overline{M} \to M$ data da $\widetilde{\tau}_M(\overline{m}) := \tau_M(m)$ soddisfa (i) e (ii) del Teorema di Equivalenza.

La costruzione del preantipode

Sia (F, G) equivalenza. Consideriamo $A\widehat{\otimes}A := {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}$ e l'isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}_A^A$:

$$\hat{\eta} := \eta_{A\otimes A} \colon A\widehat{\otimes}A \to \overline{A\widehat{\otimes}A} \otimes A \colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1\Phi^2} \otimes b_2\Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode.
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. *L'aggiunzione (F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie.*
2. *A ammette un preantipode.*

La costruzione del preantipode

Sia (F, G) equivalenza. Consideriamo $A\widehat{\otimes}A := {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}$ e l'isomorfismo in ${}_{A}\mathcal{M}_{A}^{A}$:

$$\hat{\eta} := \eta_{A\otimes A}\colon A\widehat{\otimes}A \to \overline{A\widehat{\otimes}A} \otimes A\colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1\Phi^2} \otimes b_2\Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode.
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. *L'aggiunzione (F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie.*
2. *A ammette un preantipode.*

La costruzione del preantipode

Sia (F, G) equivalenza. Consideriamo $A \widehat{\otimes} A := {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}$ e l'isomorfismo in ${}_{A}\mathcal{M}_{A}^{A}$:

$$\hat{\eta} := \eta_{A \otimes A} \colon A \widehat{\otimes} A \to \overline{A \widehat{\otimes} A} \otimes A \colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1 \Phi^2} \otimes b_2 \Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode.
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. *L'aggiunzione (F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie.*
2. *A ammette un preantipode.*

La costruzione del preantipode

Sia (F, G) equivalenza. Consideriamo $A\widehat{\otimes}A := {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A^{\bullet}_{\bullet}$ e l'isomorfismo in ${}_{A}\mathcal{M}^{A}_{A}$:

$$\hat{\eta} := \eta_{A\otimes A} \colon A\widehat{\otimes}A \to \overline{A\widehat{\otimes}A} \otimes A \colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1\Phi^2} \otimes b_2\Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode.
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. *L'aggiunzione (F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie.*
2. *A ammette un preantipode.*

La costruzione del preantipode

Sia (F, G) equivalenza. Consideriamo $A\widehat{\otimes}A := {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}$ e l'isomorfismo in ${}_{A}\mathcal{M}_{A}^{A}$:

$$\hat{\eta} := \eta_{A\otimes A} \colon A\widehat{\otimes}A \to \overline{A\widehat{\otimes}A} \otimes A \colon a \otimes b \mapsto \overline{a\Phi^1 \otimes b_1\Phi^2} \otimes b_2\Phi^3$$

- $\forall\, a \in A$, $S(a) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{1 \otimes a} \otimes 1)$ definisce un preantipode.
- $\forall\, a, b \in A$, $\xi(\overline{a \otimes b}) := (A \otimes \varepsilon)\hat{\eta}^{-1}(\overline{a \otimes b} \otimes 1)$ soddisfa $\xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$.
- Il preantipode, se esiste, è unico.

Teorema (di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf)

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra. TFAE:

1. *L'aggiunzione (F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie.*
2. *A ammette un preantipode.*

Coinvarianti per quasi-bimoduli di Hopf

Riformulando il Teorema di Struttura, ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è della forma $\overline{M} \otimes A$.

Definizione (Spazio dei coinvarianti)

Lo spazio dei coinvarianti di $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è dato da $M^{\mathrm{Co}A} := \tau_M(M)$.

Proposizione

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode e sia $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.

- $M^{\mathrm{Co}A}$ *è A-modulo sinistro con* $a \triangleright m := \tau_M(a \cdot m)$, $\forall\, a \in A, m \in M$.
- $\widetilde{\tau}_M : \overline{M} \xrightarrow{\sim} M^{\mathrm{Co}A}$ *è isomorfismo in* ${}_A\mathcal{M}$ *con inversa* $\sigma : M^{\mathrm{Co}A} \to \overline{M} : m \mapsto \overline{m}$.

Corollario

Ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è della forma $M^{\mathrm{Co}A} \otimes A$.

Coinvarianti per quasi-bimoduli di Hopf

Riformulando il Teorema di Struttura, ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è della forma $\overline{M} \otimes A$.

Definizione (Spazio dei coinvarianti)

Lo spazio dei coinvarianti di $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è dato da $M^{\mathrm{Co}A} := \tau_M(M)$.

Proposizione

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode e sia $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.

- *$M^{\mathrm{Co}A}$ è A-modulo sinistro con $a \triangleright m := \tau_M(a \cdot m)$, $\forall\, a \in A, m \in M$.*
- *$\widetilde{\tau}_M : \overline{M} \xrightarrow{\sim} M^{\mathrm{Co}A}$ è isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}$ con inversa $\sigma : M^{\mathrm{Co}A} \to \overline{M} : m \mapsto \overline{m}$.*

Corollario

Ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è della forma $M^{\mathrm{Co}A} \otimes A$.

Coinvarianti per quasi-bimoduli di Hopf

Riformulando il Teorema di Struttura, ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è della forma $\overline{M} \otimes A$.

Definizione (Spazio dei coinvarianti)

Lo spazio dei coinvarianti di $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è dato da $M^{\mathrm{Co}A} := \tau_M(M)$.

Proposizione

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode e sia $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.

- *$M^{\mathrm{Co}A}$ è A-modulo sinistro con $a \triangleright m := \tau_M(a \cdot m)$, $\forall\, a \in A, m \in M$.*
- *$\widetilde{\tau}_M \colon \overline{M} \xrightarrow{\sim} M^{\mathrm{Co}A}$ è isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}$ con inversa $\sigma \colon M^{\mathrm{Co}A} \to \overline{M} \colon m \mapsto \overline{m}$.*

Corollario

Ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è della forma $M^{\mathrm{Co}A} \otimes A$.

Coinvarianti per quasi-bimoduli di Hopf

Riformulando il Teorema di Struttura, ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è della forma $\overline{M} \otimes A$.

Definizione (Spazio dei coinvarianti)

Lo spazio dei coinvarianti di $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è dato da $M^{\mathrm{Co}A} := \tau_M(M)$.

Proposizione

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode e sia $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$.

- $M^{\mathrm{Co}A}$ *è A-modulo sinistro con $a \triangleright m := \tau_M(a \cdot m)$, $\forall\, a \in A, m \in M$.*
- $\widetilde{\tau}_M \colon \overline{M} \xrightarrow{\sim} M^{\mathrm{Co}A}$ *è isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}$ con inversa $\sigma \colon M^{\mathrm{Co}A} \to \overline{M} \colon m \mapsto \overline{m}$.*

Corollario

Ogni $M \in {}_A\mathcal{M}_A^A$ è della forma $M^{\mathrm{Co}A} \otimes A$.

I risultati classici rivisitati

Caso Hopf

Sia (H, s) un'algebra di Hopf ordinaria.

- $(H, \Delta, \varepsilon, 1 \otimes 1 \otimes 1, s)$ è una quasi-bialgebra con preantipode $S := s$.
- Sia $M \in \mathcal{M}_H^H$. Si dimostra che $\overline{M}$ e $M^{\mathrm{Co}H}$ (ordinario) sono isomorfi.
- Le trasformazioni τ coincidono.

In questo caso, il Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf si riduce al tradizionale Teorema di Struttura per moduli di Hopf.

Caso quasi-Hopf

1. Ogni quasi-Hopf $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ ammette preantipode $S(\cdot) := \beta s(\cdot)\alpha$.
2. Se inoltre s è invertibile, allora τ coincide con la proiezione E definita da Hausser e Nill:

$$\tau(m) = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(\Phi^2 m_1)\alpha\Phi^3 = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1) = E(m).$$

Si riconduce il loro risultato al Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf.

I risultati classici rivisitati

Caso Hopf

Sia (H, s) un'algebra di Hopf ordinaria.

- $(H, \Delta, \varepsilon, 1 \otimes 1 \otimes 1, s)$ è una quasi-bialgebra con preantipode $S := s$.
- Sia $M \in \mathcal{M}_H^H$. Si dimostra che $\overline{M}$ e $M^{\mathrm{Co}H}$ (ordinario) sono isomorfi.
- Le trasformazioni τ coincidono.

In questo caso, il Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf si riduce al tradizionale Teorema di Struttura per moduli di Hopf.

Caso quasi-Hopf

1. Ogni quasi-Hopf $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ ammette preantipode $S(\cdot) := \beta s(\cdot)\alpha$.
2. Se inoltre s è invertibile, allora τ coincide con la proiezione E definita da Hausser e Nill:

$$\tau(m) = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(\Phi^2 m_1)\alpha\Phi^3 = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1) = E(m).$$

Si riconduce il loro risultato al Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf.

I risultati classici rivisitati

Caso Hopf

Sia (H, s) un'algebra di Hopf ordinaria.

- $(H, \Delta, \varepsilon, 1 \otimes 1 \otimes 1, s)$ è una quasi-bialgebra con preantipode $S := s$.
- Sia $M \in \mathcal{M}_H^H$. Si dimostra che $\overline{M}$ e $M^{\mathrm{Co}H}$ (ordinario) sono isomorfi.
- Le trasformazioni τ coincidono.

In questo caso, il Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf si riduce al tradizionale Teorema di Struttura per moduli di Hopf.

Caso quasi-Hopf

1. Ogni quasi-Hopf $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ ammette preantipode $S(\cdot) := \beta s(\cdot)\alpha$.
2. Se inoltre s è invertibile, allora τ coincide con la proiezione E definita da Hausser e Nill:

$$\tau(m) = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(\Phi^2 m_1)\alpha\Phi^3 = \Phi^1 \cdot m_0 \cdot \beta s(s^{-1}(\alpha\Phi^3)\Phi^2 m_1) = E(m).$$

Si riconduce il loro risultato al Teorema di Struttura per quasi-bimoduli di Hopf.

Dal preantipode al quasi-antipode

In alcuni casi si può invertire il risultato precedente: esistono quasi-bialgebre per cui l'esistenza del preantipode implica quella del quasi-antipode.

Proposizione

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode. Se $\Phi \in \mathcal{Z}(A \otimes A \otimes A)$ allora:

- *A è Hopf ordinaria con $s(a) = \Phi^1 S(a\Phi^2)\Phi^3$.*
- *$(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, 1, S(1))$ è una quasi-algebra di Hopf.*

Teorema (Schauenburg, 2004)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra di dimensione finita. TFAE:

1. *A è una quasi-algebra di Hopf.*
2. *L'aggiunzione (F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie.*

Dal preantipode al quasi-antipode

In alcuni casi si può invertire il risultato precedente: esistono quasi-bialgebre per cui l'esistenza del preantipode implica quella del quasi-antipode.

Proposizione

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode. Se $\Phi \in \mathcal{Z}(A \otimes A \otimes A)$ allora:

- *A è Hopf ordinaria con $s(a) = \Phi^1 S(a\Phi^2)\Phi^3$.*
- *$(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, 1, S(1))$ è una quasi-algebra di Hopf.*

Teorema (Schauenburg, 2004)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra di dimensione finita. TFAE:

1. *A è una quasi-algebra di Hopf.*
2. *L'aggiunzione (F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie.*

Dal preantipode al quasi-antipode

In alcuni casi si può invertire il risultato precedente: esistono quasi-bialgebre per cui l'esistenza del preantipode implica quella del quasi-antipode.

Proposizione

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ *quasi-bialgebra con preantipode. Se* $\Phi \in \mathcal{Z}(A \otimes A \otimes A)$ *allora:*

- A *è Hopf ordinaria con* $s(a) = \Phi^1 S(a\Phi^2)\Phi^3$*.*
- $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, 1, S(1))$ *è una quasi-algebra di Hopf.*

Teorema (Schauenburg, 2004)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *una quasi-bialgebra di dimensione finita. TFAE:*

1. A *è una quasi-algebra di Hopf.*
2. *L'aggiunzione* (F, G, η, ϵ) *è un'equivalenza di categorie.*

Dal preantipode al quasi-antipode

In alcuni casi si può invertire il risultato precedente: esistono quasi-bialgebre per cui l'esistenza del preantipode implica quella del quasi-antipode.

Proposizione

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode. Se $\Phi \in \mathcal{Z}(A \otimes A \otimes A)$ allora:

- *A è Hopf ordinaria con $s(a) = \Phi^1 S(a\Phi^2)\Phi^3$.*
- *$(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, 1, S(1))$ è una quasi-algebra di Hopf.*

Teorema (Schauenburg, 2004)

Sia $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ una quasi-bialgebra di dimensione finita. TFAE:

1. *A è una quasi-algebra di Hopf.*
2. *L'aggiunzione (F, G, η, ϵ) è un'equivalenza di categorie.*

Una traccia di dimostrazione

- (F, G) equivalenza $\Rightarrow \hat{\eta}\colon {}_{\bullet}A \otimes A \to \overline{{}_{\bullet}A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}$.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Per Krull-Schmidt, $\exists \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$

- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow$ A è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
  $\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:

$$x \blacktriangleright a = as(x).$$

- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,

$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_sA)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}\colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$

- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- (F, G) equivalenza $\Rightarrow \hat{\eta}\colon {}_\bullet A \otimes A \to \overline{{}_\bullet A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}$.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Per Krull-Schmidt, $\exists \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$

- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow A$ è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
  $\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:

$$x \blacktriangleright a = as(x).$$

- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,

$$\theta\colon {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet \to {}_\bullet({}_s A)_\circ \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet \colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$

- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- (F,G) equivalenza $\Rightarrow \hat{\eta}\colon \bullet A \otimes A \to \overline{\bullet A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}$.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$

- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow A$ è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
  $\exists\; s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:

$$x \blacktriangleright a = as(x).$$

- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,

$$\theta\colon {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet \to {}_\bullet({}_sA)_\circ \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet\colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$

- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s,α,β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- (F,G) equivalenza $\Rightarrow \hat{\eta}\colon {}_{\bullet}A \otimes A \to \overline{{}_{\bullet}A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo in ${}_{A}\mathcal{M}$.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ in ${}_{A}\mathcal{M}$.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ in ${}_{A}\mathcal{M}$.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \qquad \text{e} \qquad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$

- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow A$ è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
  $\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:

$$x \blacktriangleright a = as(x).$$

- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,

$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}\colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$

- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- (F, G) equivalenza $\Rightarrow \hat{\eta}\colon {}_\bullet A \otimes A \to \overline{{}_\bullet A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}$.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:
$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$
- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow A$ è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
$\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:
$$x \blacktriangleright a = as(x).$$
- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,
$$\theta\colon {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet \to {}_\bullet({}_s A)_\circ \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet\colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$
- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- (F, G) equivalenza $\Rightarrow \hat{\eta}\colon {}_\bullet A \otimes A \to \overline{{}_\bullet A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}$.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:
$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$
- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow A$ è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
$\exists\ s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:
$$x \blacktriangleright a = as(x).$$
- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,
$$\theta\colon {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet \to {}_\bullet({}_sA)_\circ \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet \colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$
- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. □

Una traccia di dimostrazione

- (F, G) equivalenza $\Rightarrow \hat{\eta}\colon {}_{\bullet}A \otimes A \to \overline{{}_{\bullet}A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo in ${}_{A}\mathcal{M}$.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ in ${}_{A}\mathcal{M}$.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma}\colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ in ${}_{A}\mathcal{M}$.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$

- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow A$ è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
  $\exists\, s\colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:

$$x \blacktriangleright a = as(x).$$

- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,

$$\theta\colon {}_{\circ}A_{\bullet} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet} \to {}_{\bullet}({}_{s}A)_{\circ} \otimes {}_{\bullet}A_{\bullet}^{\bullet}\colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$

- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Una traccia di dimostrazione

- (F, G) equivalenza $\Rightarrow \hat{\eta} \colon {}_\bullet A \otimes A \to \overline{{}_\bullet A \otimes A} \otimes A$ isomorfismo in ${}_A\mathcal{M}$.
- $\dim_{\Bbbk}(A) < \infty \Rightarrow \overline{A \otimes A}^{\dim(A)} \cong A^{\dim(A)}$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Per Krull-Schmidt, $\exists\, \widetilde{\gamma} \colon \overline{A \otimes A} \xrightarrow{\sim} A$ in ${}_A\mathcal{M}$.
- Sia $\gamma(a) := \widetilde{\gamma}(\overline{1 \otimes a})$, $\forall\, a \in A$. Si prova che valgono:
$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \quad \text{e} \quad a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1).$$
- $\overline{A \otimes A}$ è $A \otimes A$-modulo sinistro $\Rightarrow A$ è $A \otimes A$-modulo sinistro via $\widetilde{\gamma}$.
$\exists\, s \colon A \to A$ antiendomorfismo per cui l'azione del fattore destro è della forma:
$$x \blacktriangleright a = as(x).$$
- $\beta := \gamma(1)$. Si costruisce l'isomorfismo $\theta := (\widetilde{\gamma} \otimes A) \circ \hat{\eta}$,
$$\theta \colon {}_\circ A_\bullet \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet \to {}_\bullet({}_sA)_\circ \otimes {}_\bullet A_\bullet^\bullet \colon a \otimes b \mapsto a\Phi^1\beta s(b_1\Phi^2) \otimes b_2\Phi^3$$
- $\alpha := (A \otimes \varepsilon)(\theta^{-1}(1 \otimes 1))$. Si prova che (s, α, β) è un quasi-antipode. $\square$

Ricostruire il quasi-antipode

Si confrontino:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \qquad \xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$$
$$a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1) \qquad a_1S(a_2) = \varepsilon(a)S(1)$$

A posteriori, la differenza sostanziale risiede in:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b) \quad \text{mentre} \quad \xi(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b)\alpha$$

e α non è necessariamente invertibile.

Proposizione

Se ξ è biunivoca, allora $(s, 1, S(1))$ è quasi-antipode con $s(a) = 1^1S(a1^2)$, $\forall\, a \in A$, dove $\overline{1^1 \otimes 1^2} = \xi^{-1}(1)$ (senza ipotesi sulla dimensione di A).

Corollario

Se $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ è quasi-Hopf di dimensione finita e α è invertibile, allora ξ è biunivoca e si può ricostruire il quasi-antipode.

Ricostruire il quasi-antipode

Si confrontino:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \qquad \xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$$
$$a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1) \qquad a_1 S(a_2) = \varepsilon(a)S(1)$$

A posteriori, la differenza sostanziale risiede in:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b) \quad \text{mentre} \quad \xi(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b)\alpha$$

e α non è necessariamente invertibile.

Proposizione

Se ξ è biunivoca, allora $(s, 1, S(1))$ è quasi-antipode con $s(a) = 1^1 S(a1^2)$, $\forall\, a \in A$, dove $\overline{1^1 \otimes 1^2} = \xi^{-1}(1)$ (senza ipotesi sulla dimensione di A).

Corollario

Se $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ è quasi-Hopf di dimensione finita e α è invertibile, allora ξ è biunivoca e si può ricostruire il quasi-antipode.

Ricostruire il quasi-antipode

Si confrontino:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \qquad \xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$$
$$a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1) \qquad a_1S(a_2) = \varepsilon(a)S(1)$$

A posteriori, la differenza sostanziale risiede in:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b) \quad \text{mentre} \quad \xi(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b)\alpha$$

e α non è necessariamente invertibile.

Proposizione

Se ξ è biunivoca, allora $(s, 1, S(1))$ è quasi-antipode con $s(a) = 1^1S(a1^2)$, $\forall\, a \in A$, dove $\overline{1^1 \otimes 1^2} = \xi^{-1}(1)$ (senza ipotesi sulla dimensione di A).

Corollario

Se $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ è quasi-Hopf di dimensione finita e α è invertibile, allora ξ è biunivoca e si può ricostruire il quasi-antipode.

Ricostruire il quasi-antipode

Si confrontino:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\gamma(b) \qquad \xi(\overline{a \otimes b}) = aS(b)$$
$$a_1\gamma(a_2) = \varepsilon(a)\gamma(1) \qquad a_1S(a_2) = \varepsilon(a)S(1)$$

A posteriori, la differenza sostanziale risiede in:

$$\widetilde{\gamma}(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b) \quad \text{mentre} \quad \xi(\overline{a \otimes b}) = a\beta s(b)\alpha$$

e α non è necessariamente invertibile.

Proposizione

Se ξ è biunivoca, allora $(s, 1, S(1))$ è quasi-antipode con $s(a) = 1^1 S(a1^2)$, $\forall\, a \in A$, dove $\overline{1^1 \otimes 1^2} = \xi^{-1}(1)$ (senza ipotesi sulla dimensione di A).

Corollario

Se $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, s, \alpha, \beta)$ è quasi-Hopf di dimensione finita e α è invertibile, allora ξ è biunivoca e si può ricostruire il quasi-antipode.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 ($\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$) con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_\Bbbk) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_\Bbbk$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1 - g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S \colon H(2) \to H(2) \colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi \colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2) \colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.
Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 ($\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$) con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_{\Bbbk}$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1 - g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S\colon H(2) \to H(2)\colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi\colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2)\colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.
Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 $(\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2)$ con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_{\Bbbk}$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1-g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S\colon H(2) \to H(2)\colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi\colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2)\colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.
Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 ($\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$) con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_\Bbbk) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_\Bbbk$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1 - g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S \colon H(2) \to H(2) \colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi \colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2) \colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.

Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

Esempio (Etingof e Gelaki)

Sia $C_2 = \langle g \rangle$ gruppo ciclico di ordine 2 e sia $H(2) := \Bbbk C_2$ la bialgebra di gruppo su C_2 ($\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$) con operazioni:

$$m(p \otimes q) = pq, \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_{C_2}, \quad \Delta(p) = p \otimes p, \quad \varepsilon(p) = 1_{\Bbbk}$$

$\forall\, p, q \in C_2$. Consideriamo il riassociatore non banale:

$$\Phi := (1 \otimes 1 \otimes 1) - 2(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) \qquad \left(\lambda := \frac{1}{2}(1 - g)\right).$$

$(H(2), \Delta, \varepsilon, \Phi, \mathrm{Id}_{H(2)}, g, 1)$ è una quasi-algebra di Hopf.

$$S\colon H(2) \to H(2)\colon z \mapsto zg$$

definisce un preantipode per $H(2)$.

$$\xi\colon \overline{H(2) \otimes H(2)} \to H(2)\colon \overline{x \otimes y} \mapsto xyg$$

è invertibile con $\xi^{-1}(x) = \overline{x \otimes g}$.
Un quasi-antipode per $H(2)$ è dato allora da $(\mathrm{Id}_{H(2)}, 1, g)$.

Works in progress

Krull-Schmidt (?)

E' possibile, mediante il ricorso al preantipode, ottenere una versione costruttiva della dimostrazione di Schauenburg?

K-S serve per trovare l'isomorfismo $\widetilde{\gamma}\colon \overline{{}_{\bullet}A \otimes A} \to {}_{\bullet}A$. Se ξ è invertibile, sì. Lo è sempre? E se non lo è?

Idea: $\overline{{}_{\bullet}A \otimes A} \cong (\overline{{}_{\bullet}A \otimes A} \otimes A_{\bullet}^{\bullet}) \underset{A}{\otimes} \Bbbk \cong ({}_{\bullet}A_{\bullet} \otimes A_{\bullet}^{\bullet}) \underset{A}{\otimes} \Bbbk$.

Domanda: $({}_{\bullet}A_{\bullet} \otimes A_{\bullet}^{\bullet}) \underset{A}{\otimes} \Bbbk \cong {}_{\bullet}A$?

Controesempio

Esiste un esempio di quasi-bialgebra con preantipode che non ammetta un quasi-antipode (in dimensione infinita)? O una dimostrazione del fatto che le due nozioni sono equivalenti?

Idea: Nel caso coquasi esiste un esempio dovuto a Schauenburg.

Domanda: E' possibile riadattarlo al caso quasi? E' possibile che il duale finito della coquasi-bialgebra di Schauenburg conduca ad un esempio anche nel caso quasi?

Works in progress

Krull-Schmidt (?)

E' possibile, mediante il ricorso al preantipode, ottenere una versione costruttiva della dimostrazione di Schauenburg?

K-S serve per trovare l'isomorfismo $\widetilde{\gamma}\colon \overline{{}_\bullet A \otimes A} \to {}_\bullet A$. Se ξ è invertibile, sì. Lo è sempre? E se non lo è?

Idea: $\overline{{}_\bullet A \otimes A} \cong (\overline{{}_\bullet A \otimes A} \otimes A^{\bullet}_{\bullet}) \underset{A}{\otimes} \Bbbk \cong ({}_\bullet A_\bullet \otimes A^{\bullet}_{\bullet}) \underset{A}{\otimes} \Bbbk$.

Domanda: $({}_\bullet A_\bullet \otimes A^{\bullet}_{\bullet}) \underset{A}{\otimes} \Bbbk \cong {}_\bullet A$?

Controesempio

Esiste un esempio di quasi-bialgebra con preantipode che non ammetta un quasi-antipode (in dimensione infinita)? O una dimostrazione del fatto che le due nozioni sono equivalenti?

Idea: Nel caso coquasi esiste un esempio dovuto a Schauenburg.

Domanda: E' possibile riadattarlo al caso quasi? E' possibile che il duale finito della coquasi-bialgebra di Schauenburg conduca ad un esempio anche nel caso quasi?

bibliografia

A. Ardizzoni, A. Pavarin, *Preantipodes for Dual Quasi-Bialgebras*. Israel J. Math. **192** (2012), no. 1, 281-295.

V. G. Drinfel'd, *Quasi-Hopf algebras*. (Russian) Algebra i Analiz **1** (1989), no. 6, 114-148; translation in Leningrad Math. J. **1** (1990), no. 6, 1419-1457.

P. Etingof, S. Gelaki, *Finite dimensional quasi-Hopf algebras with radical of codimension 2*. Math. Res. Lett.**11** (2004) no. 5-6, 685-696.

F. Hausser, F. Nill, *Integral theory for quasi-Hopf algebras*, preprint (arXiv:math/9904164v2).

R. G. Larson, M. E. Sweedler, *An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras*. Amer. J. Math. **91** (1969), 75-94.

P. Schauenburg, *Two characterizations of finite quasi-Hopf algebras*. J. Algebra **273** (2004), no. 2, 538-550.

M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*. W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

Gauge twisting

Definizione (Trasformazione gauge, twist [Drinfel'd, 1989])

$(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ quasi-bialgebra. Una trasformazione gauge su A è un elemento invertibile $F \in A \otimes A$ tale che:

$$(A \otimes \varepsilon)(F) = 1 = (\varepsilon \otimes A)(F).$$

Posti

$\Delta_F(\cdot) := F\Delta(\cdot)F^{-1}$, $\Phi_F := (1 \otimes F) \cdot (A \otimes \Delta)(F) \cdot \Phi \cdot (\Delta \otimes A)(F^{-1}) \cdot (F^{-1} \otimes 1)$

si ha che $A_F := (A, m, u, \Delta_F, \varepsilon, \Phi_F)$ è quasi-bialgebra ottenuta come twist di A.

Proposizione

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode. Allora la mappa

$$S_F(a) := F^1 S(f^1 a F^2) f^2, \quad (\forall\, a \in A)$$

è un preantipode per A_F, dove $F^1 \otimes F^2 = F$ e $f^1 \otimes f^2 = F^{-1}$.

Gauge twisting

Definizione (Trasformazione gauge, twist [Drinfel'd, 1989])

$(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ quasi-bialgebra. Una trasformazione gauge su A è un elemento invertibile $F \in A \otimes A$ tale che:

$$(A \otimes \varepsilon)(F) = 1 = (\varepsilon \otimes A)(F).$$

Posti

$\Delta_F(\cdot) := F\Delta(\cdot)F^{-1}$, $\Phi_F := (1 \otimes F) \cdot (A \otimes \Delta)(F) \cdot \Phi \cdot (\Delta \otimes A)(F^{-1}) \cdot (F^{-1} \otimes 1)$

si ha che $A_F := (A, m, u, \Delta_F, \varepsilon, \Phi_F)$ è quasi-bialgebra ottenuta come twist di A.

Proposizione

Sia $(A, m, u, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ quasi-bialgebra con preantipode. Allora la mappa

$$S_F(a) := F^1 S(f^1 a F^2) f^2, \quad (\forall\, a \in A)$$

è un preantipode per A_F, dove $F^1 \otimes F^2 = F$ e $f^1 \otimes f^2 = F^{-1}$.