UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Dalle Algebre di Frobenius ai Funtori di Frobenius, alla Teoria delle Algebre di Hopf

Paolo Saracco

ULB - Université Libre de Bruxelles

WELCOME HOME - Torino, Dicembre 2018

La questione originale di Frobenius

- $\Bbbk$ un campo fissato (e.g. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o anche $\mathbb{Z}_p$).
- A una $\Bbbk$-algebra: anello dotato di un morfismo di anelli $u : \Bbbk \to A$ tale che $u(x) \in \mathcal{Z}(A)$ per ogni $x \in \Bbbk$ (e.g. $\Bbbk$ su $\Bbbk$, $\mathbb{C}[X]$ su $\mathbb{C}$ o $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_p)$ su $\mathbb{Z}_p$).
- $\dim_{\Bbbk}(A) = t < \infty$ e $A = \mathrm{Span}_{\Bbbk}\{e_1, \ldots, e_t\}$.

Per ogni $a \in A$, esistono scalari $l^a_{i,j}, r^a_{i,j}$ in $\Bbbk$ tali che

$$ae_i = \sum_{k=1}^{t} l^a_{k,i} e_k \qquad \text{e} \qquad e_i a = \sum_{k=1}^{t} r^a_{i,k} e_k, \qquad \forall\, 1 \leq i \leq t$$

Lemma

$\lambda : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(l^{(a)}_{i,j}\right), \quad \rho : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(r^{(a)}_{i,j}\right)$
sono morfismi di algebre.

Questione (Frobenius): Quando λ e ρ sono equivalenti?

Cioè , $\exists\, U \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ tale che $\rho(a) = U\lambda(a)U^{-1}$ per ogni $a \in A$.

La questione originale di Frobenius

- $\Bbbk$ un campo fissato (e.g. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o anche $\mathbb{Z}_p$).
- A una $\Bbbk$-algebra: anello dotato di un morfismo di anelli $u : \Bbbk \to A$ tale che $u(x) \in \mathcal{Z}(A)$ per ogni $x \in \Bbbk$ (e.g. $\Bbbk$ su $\Bbbk$, $\mathbb{C}[X]$ su $\mathbb{C}$ o $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_p)$ su $\mathbb{Z}_p$).
- $\dim_{\Bbbk}(A) = t < \infty$ e $A = \mathrm{Span}_{\Bbbk}\{e_1, \ldots, e_t\}$.

Per ogni $a \in A$, esistono scalari $l^a_{i,j}, r^a_{i,j}$ in $\Bbbk$ tali che

$$ae_i = \sum_{k=1}^{t} l^a_{k,i} e_k \qquad \text{e} \qquad e_i a = \sum_{k=1}^{t} r^a_{i,k} e_k, \qquad \forall\, 1 \leq i \leq t$$

Lemma

$$\lambda : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(l^{(a)}_{i,j}\right), \quad \rho : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(r^{(a)}_{i,j}\right)$$

sono morfismi di algebre.

Questione (Frobenius): Quando λ e ρ sono equivalenti?

Cioè , $\exists\, U \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ tale che $\rho(a) = U\lambda(a)U^{-1}$ per ogni $a \in A$.

La questione originale di Frobenius

- $\Bbbk$ un campo fissato (e.g. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o anche $\mathbb{Z}_p$).
- A una $\Bbbk$-algebra: anello dotato di un morfismo di anelli $u : \Bbbk \to A$ tale che $u(x) \in \mathcal{Z}(A)$ per ogni $x \in \Bbbk$ (e.g. $\Bbbk$ su $\Bbbk$, $\mathbb{C}[X]$ su $\mathbb{C}$ o $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_p)$ su $\mathbb{Z}_p$).
- $\dim_{\Bbbk}(A) = t < \infty$ e $A = \mathrm{Span}_{\Bbbk}\{e_1, \ldots, e_t\}$.

Per ogni $a \in A$, esistono scalari $l^a_{i,j}, r^a_{i,j}$ in $\Bbbk$ tali che

$$ae_i = \sum_{k=1}^{t} l^a_{k,i} e_k \qquad \text{e} \qquad e_i a = \sum_{k=1}^{t} r^a_{i,k} e_k, \qquad \forall\, 1 \leq i \leq t$$

Lemma

$\lambda : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(l^{(a)}_{i,j}\right), \quad \rho : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(r^{(a)}_{i,j}\right)$
sono morfismi di algebre.

Questione (Frobenius): Quando λ e ρ sono equivalenti?

Cioè , $\exists\, U \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ tale che $\rho(a) = U\lambda(a)U^{-1}$ per ogni $a \in A$.

La questione originale di Frobenius

- $\Bbbk$ un campo fissato (e.g. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o anche $\mathbb{Z}_p$).
- A una $\Bbbk$-algebra: anello dotato di un morfismo di anelli $u : \Bbbk \to A$ tale che $u(x) \in \mathcal{Z}(A)$ per ogni $x \in \Bbbk$ (e.g. $\Bbbk$ su $\Bbbk$, $\mathbb{C}[X]$ su $\mathbb{C}$ o $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_p)$ su $\mathbb{Z}_p$).
- $\dim_{\Bbbk}(A) = t < \infty$ e $A = \mathrm{Span}_{\Bbbk}\{e_1, \ldots, e_t\}$.

Per ogni $a \in A$, esistono scalari $l^a_{i,j}, r^a_{i,j}$ in $\Bbbk$ tali che

$$ae_i = \sum_{k=1}^{t} l^a_{k,i} e_k \qquad \text{e} \qquad e_i a = \sum_{k=1}^{t} r^a_{i,k} e_k, \qquad \forall\, 1 \leq i \leq t$$

Lemma

$\lambda : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(l^{(a)}_{i,j}\right), \quad \rho : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(r^{(a)}_{i,j}\right)$
sono morfismi di algebre.

Questione (Frobenius): Quando λ e ρ sono equivalenti?

Cioè , $\exists\, U \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ tale che $\rho(a) = U\lambda(a)U^{-1}$ per ogni $a \in A$.

La questione originale di Frobenius

- $\Bbbk$ un campo fissato (e.g. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o anche $\mathbb{Z}_p$).
- A una $\Bbbk$-algebra: anello dotato di un morfismo di anelli $u : \Bbbk \to A$ tale che $u(x) \in \mathcal{Z}(A)$ per ogni $x \in \Bbbk$ (e.g. $\Bbbk$ su $\Bbbk$, $\mathbb{C}[X]$ su $\mathbb{C}$ o $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_p)$ su $\mathbb{Z}_p$).
- $\dim_{\Bbbk}(A) = t < \infty$ e $A = \mathrm{Span}_{\Bbbk}\{e_1, \ldots, e_t\}$.

Per ogni $a \in A$, esistono scalari $l^a_{i,j}, r^a_{i,j}$ in $\Bbbk$ tali che

$$ae_i = \sum_{k=1}^{t} l^a_{k,i} e_k \qquad \text{e} \qquad e_i a = \sum_{k=1}^{t} r^a_{i,k} e_k, \qquad \forall\, 1 \leq i \leq t$$

Lemma

$\lambda : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(l^{(a)}_{i,j}\right), \quad \rho : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(r^{(a)}_{i,j}\right)$
sono morfismi di algebre.

Questione (Frobenius): Quando λ e ρ sono equivalenti?

Cioè , $\exists\, U \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ tale che $\rho(a) = U\lambda(a)U^{-1}$ per ogni $a \in A$.

La questione originale di Frobenius

- $\Bbbk$ un campo fissato (e.g. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o anche $\mathbb{Z}_p$).
- A una $\Bbbk$-algebra: anello dotato di un morfismo di anelli $u : \Bbbk \to A$ tale che $u(x) \in \mathcal{Z}(A)$ per ogni $x \in \Bbbk$ (e.g. $\Bbbk$ su $\Bbbk$, $\mathbb{C}[X]$ su $\mathbb{C}$ o $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}_p)$ su $\mathbb{Z}_p$).
- $\dim_{\Bbbk}(A) = t < \infty$ e $A = \mathrm{Span}_{\Bbbk}\{e_1, \ldots, e_t\}$.

Per ogni $a \in A$, esistono scalari $l^a_{i,j}, r^a_{i,j}$ in $\Bbbk$ tali che

$$ae_i = \sum_{k=1}^{t} l^a_{k,i} e_k \qquad \text{e} \qquad e_i a = \sum_{k=1}^{t} r^a_{i,k} e_k, \qquad \forall\, 1 \leq i \leq t$$

Lemma

$\lambda : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(l^{(a)}_{i,j}\right)$, $\quad \rho : A \to \mathrm{Mat}_t(\Bbbk),\ a \mapsto \left(r^{(a)}_{i,j}\right)$ *sono morfismi di algebre.*

Questione (Frobenius): Quando λ e ρ sono equivalenti?

Cioè , $\exists\, U \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ tale che $\rho(a) = U\lambda(a)U^{-1}$ per ogni $a \in A$.

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

$$
\begin{aligned}
&(1) && \lambda \text{ e } \rho \text{ sono equivalenti}, \\
&(2) && \exists\, \beta : A \times A \to \mathbb{k} \text{ bilineare tale che } \beta(ab, c) = \beta(a, bc) \\
& && \text{e se } \beta(a, A) = 0 \text{ o } \beta(A, a) = 0 \text{ allora } a = 0, \\
&(3) && \exists\, \epsilon \in A^*, e = \sum e^{(1)} \otimes e^{(2)} \in A \otimes A \text{ tali che} \\
& && ae = ea \quad \text{e} \quad \sum \epsilon\left(e^{(1)}\right) e^{(2)} = 1 = \sum e^{(1)} \epsilon\left(e^{(2)}\right).
\end{aligned}
$$

Se A soddisfa una qualsiasi delle proprietà precedenti allora è chiamata algebra di Frobenius. Ad esempio, $A = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k})$.

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(1) λ *e* ρ *sono equivalenti,*

(2) $\exists\, \beta : A \times A \to \Bbbk$ *bilineare tale che* $\beta(ab, c) = \beta(a, bc)$ *e se* $\beta(a, A) = 0$ *o* $\beta(A, a) = 0$ *allora* $a = 0$,

(3) $\exists\, \epsilon \in A^*, e = \sum e^{(1)} \otimes e^{(2)} \in A \otimes A$ *tali che*

$$ae = ea \quad e \quad \sum \epsilon\left(e^{(1)}\right) e^{(2)} = 1 = \sum e^{(1)} \epsilon\left(e^{(2)}\right).$$

Se A soddisfa una qualsiasi delle proprietà precedenti allora è chiamata algebra di Frobenius. Ad esempio, $A = \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$.

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

$$
\begin{aligned}
&(1) && \lambda \textit{ e } \rho \textit{ sono equivalenti},\\
&(2) && \exists\, \beta : A \times A \to \mathbb{k} \textit{ bilineare tale che } \beta(ab,c) = \beta(a,bc)\\
& && \textit{e se } \beta(a,A) = 0 \textit{ o } \beta(A,a) = 0 \textit{ allora } a = 0,\\
&(3) && \exists\, \epsilon \in A^*, e = \sum e^{(1)} \otimes e^{(2)} \in A \otimes A \textit{ tali che}\\
& && ae = ea \quad \textit{e} \quad \sum \epsilon\left(e^{(1)}\right) e^{(2)} = 1 = \sum e^{(1)} \epsilon\left(e^{(2)}\right).
\end{aligned}
$$

Se A soddisfa una qualsiasi delle proprietà precedenti allora è chiamata algebra di Frobenius. Ad esempio, $A = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k})$.

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

$$
\begin{aligned}
&(1) && \lambda \text{ e } \rho \text{ sono equivalenti},\\
&(2) && \exists\, \beta : A \times A \to \Bbbk \text{ bilineare tale che } \beta(ab, c) = \beta(a, bc)\\
& && \text{e se } \beta(a, A) = 0 \text{ o } \beta(A, a) = 0 \text{ allora } a = 0,\\
&(3) && \exists\, \epsilon \in A^*, e = \sum e^{(1)} \otimes e^{(2)} \in A \otimes A \text{ tali che}\\
& && ae = ea \ \text{ e } \ \sum \epsilon\left(e^{(1)}\right) e^{(2)} = 1 = \sum e^{(1)} \epsilon\left(e^{(2)}\right).
\end{aligned}
$$

Se A soddisfa una qualsiasi delle proprietà precedenti allora è chiamata algebra di Frobenius. Ad esempio, $A = \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$.

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

$$
\begin{aligned}
&(1) && \lambda \text{ e } \rho \text{ sono equivalenti},\\
&(2) && \exists\, \beta : A \times A \to \mathbb{k} \text{ bilineare tale che } \beta(ab, c) = \beta(a, bc)\\
& && \text{e se } \beta(a, A) = 0 \text{ o } \beta(A, a) = 0 \text{ allora } a = 0,\\
&(3) && \exists\, \epsilon \in A^*, e = \sum e^{(1)} \otimes e^{(2)} \in A \otimes A \text{ tali che}\\
& && ae = ea \quad \text{e} \quad \sum \epsilon\left(e^{(1)}\right) e^{(2)} = 1 = \sum e^{(1)} \epsilon\left(e^{(2)}\right).
\end{aligned}
$$

Se A soddisfa una qualsiasi delle proprietà precedenti allora è chiamata algebra di Frobenius. Ad esempio, $A = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k})$.

La prima estensione: da campo ad anello

Definizione (Kasch, 1954)

Sia $f : A \to B$ un morfismo di anelli. Diciamo che B è una estensione di Frobenius di A se

(a) $\exists\, E : B \to A$, A-bilineare,

(b) $\exists\, \{x_i, y_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ in B tali che

$$\sum_i E(ax_i)y_i = a = \sum_i x_i E(y_i a) \qquad \forall\, a \in A$$

Una $\mathbb{k}$ algebra A è di Frobenius se e solo se l'estensione $u : \mathbb{k} \to A$ è di Frobenius.

La prima estensione: da campo ad anello

Definizione (Kasch, 1954)

Sia $f : A \to B$ un morfismo di anelli. Diciamo che B è una estensione di Frobenius di A se

(a) $\exists\, E : B \to A$, A-bilineare,

(b) $\exists\, \{x_i, y_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ in B tali che

$$\sum_i E(ax_i)y_i = a = \sum_i x_i E(y_i a) \qquad \forall\, a \in A$$

Una $\Bbbk$ algebra A è di Frobenius se e solo se l'estensione $u : \Bbbk \to A$ è di Frobenius.

La prima estensione: da campo ad anello

Definizione (Kasch, 1954)

Sia $f : A \to B$ un morfismo di anelli. Diciamo che B è una estensione di Frobenius di A se

(a) $\exists\, E : B \to A$, A-bilineare,

(b) $\exists\, \{x_i, y_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ in B tali che

$$\sum_i E(ax_i)y_i = a = \sum_i x_i E(y_i a) \qquad \forall\, a \in A$$

Una $\Bbbk$ algebra A è di Frobenius se e solo se l'estensione $u : \Bbbk \to A$ è di Frobenius.

La seconda estensione: da anelli a funtori

- $f : A \to B$ di anelli
- $\mathcal{L} := - \otimes_A B : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ estensione degli scalari
- $\mathcal{R} := (-)_f : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$ restrizione degli scalari
- $\forall\, M \in \mathrm{Mod}_A, N \in \mathrm{Mod}_B$ abbiamo

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_B\left(M \otimes_A B, N\right) & \xleftrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_A\left(M, N_f\right) \\
\varphi & \longmapsto & [m \mapsto \varphi(m \otimes_A 1_B)] \\
[m \otimes_A b \mapsto \psi(m)b] & \longleftarrow\!\shortmid & \psi
\end{array}
$$

Cioè , *il funtore $\mathcal{L}$ è aggiunto sx al funtore $\mathcal{R}$*.

Teorema (Morita, 1965)

$f : A \to B$ è di Frobenius se e solo se vale anche

$$\mathrm{Hom}_A\left(N_f, M\right) \cong \mathrm{Hom}_B\left(N, M \otimes_A B\right),$$

cioè , $\mathcal{L}$ è anche aggiunto dx di $\mathcal{R}$.

La seconda estensione: da anelli a funtori

- $f : A \to B$ di anelli
- $\mathcal{L} := - \otimes_A B : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ estensione degli scalari
- $\mathcal{R} := (-)_f : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$ restrizione degli scalari
- $\forall\, M \in \mathrm{Mod}_A, N \in \mathrm{Mod}_B$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_B\left(M \otimes_A B, N\right) &\xleftrightarrow{\;\cong\;} \mathrm{Hom}_A\left(M, N_f\right) \\
\varphi &\longmapsto [m \mapsto \varphi(m \otimes_A 1_B)] \\
[m \otimes_A b \mapsto \psi(m)b] &\longleftarrow\!\shortmid\; \psi
\end{aligned}$$

Cioè , *il funtore $\mathcal{L}$ è aggiunto sx al funtore $\mathcal{R}$*.

Teorema (Morita, 1965)

$f : A \to B$ è di Frobenius se e solo se vale anche

$$\mathrm{Hom}_A\left(N_f, M\right) \cong \mathrm{Hom}_B\left(N, M \otimes_A B\right),$$

cioè , $\mathcal{L}$ è anche aggiunto dx di $\mathcal{R}$.

La seconda estensione: da anelli a funtori

- $f : A \to B$ di anelli
- $\mathcal{L} := - \otimes_A B : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ estensione degli scalari
- $\mathcal{R} := (-)_f : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$ restrizione degli scalari
- $\forall\, M \in \mathrm{Mod}_A, N \in \mathrm{Mod}_B$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) &\xleftrightarrow{\;\cong\;} \mathrm{Hom}_A(M, N_f) \\ \varphi &\longmapsto [m \mapsto \varphi(m \otimes_A 1_B)] \\ [m \otimes_A b \mapsto \psi(m)b] &\longleftarrow\!\shortmid\; \psi \end{aligned}$$

Cioè , *il funtore $\mathcal{L}$ è aggiunto sx al funtore $\mathcal{R}$*.

Teorema (Morita, 1965)

$f : A \to B$ è di Frobenius se e solo se vale anche

$$\mathrm{Hom}_A(N_f, M) \cong \mathrm{Hom}_B(N, M \otimes_A B),$$

cioè , $\mathcal{L}$ è anche aggiunto dx di $\mathcal{R}$.

La seconda estensione: da anelli a funtori

- $f : A \to B$ di anelli
- $\mathcal{L} := - \otimes_A B : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ estensione degli scalari
- $\mathcal{R} := (-)_f : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$ restrizione degli scalari
- $\forall\, M \in \mathrm{Mod}_A, N \in \mathrm{Mod}_B$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_B\left(M \otimes_A B, N\right) &\xleftrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_A\left(M, N_f\right) \\ \varphi &\longmapsto [m \mapsto \varphi(m \otimes_A 1_B)] \\ [m \otimes_A b \mapsto \psi(m)b] &\longleftarrow\!\shortmid\ \psi \end{aligned}$$

Cioè , *il funtore $\mathcal{L}$ è aggiunto sx al funtore $\mathcal{R}$*.

Teorema (Morita, 1965)

$f : A \to B$ è di Frobenius se e solo se vale anche

$$\mathrm{Hom}_A\left(N_f, M\right) \cong \mathrm{Hom}_B\left(N, M \otimes_A B\right),$$

cioè , $\mathcal{L}$ è anche aggiunto dx di $\mathcal{R}$.

La seconda estensione: da anelli a funtori

- $f : A \to B$ di anelli
- $\mathcal{L} := - \otimes_A B : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ estensione degli scalari
- $\mathcal{R} := (-)_f : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$ restrizione degli scalari
- $\forall\, M \in \mathrm{Mod}_A, N \in \mathrm{Mod}_B$ abbiamo

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_B\left(M \otimes_A B, N\right) & \xleftrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_A\left(M, N_f\right) \\ \varphi & \longmapsto & [m \mapsto \varphi(m \otimes_A 1_B)] \\ [m \otimes_A b \mapsto \psi(m)b] & \longleftarrow\!\shortmid & \psi \end{array}$$

Cioè , *il funtore $\mathcal{L}$ è aggiunto sx al funtore $\mathcal{R}$*.

Teorema (Morita, 1965)

$f : A \to B$ è di Frobenius se e solo se vale anche

$$\mathrm{Hom}_A\left(N_f, M\right) \cong \mathrm{Hom}_B\left(N, M \otimes_A B\right),$$

cioè , $\mathcal{L}$ è anche aggiunto dx di $\mathcal{R}$.

La seconda estensione: da anelli a funtori

- $f : A \to B$ di anelli
- $\mathcal{L} := - \otimes_A B : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ estensione degli scalari
- $\mathcal{R} := (-)_f : \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$ restrizione degli scalari
- $\forall\, M \in \mathrm{Mod}_A, N \in \mathrm{Mod}_B$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_B\left(M \otimes_A B, N\right) &\xleftrightarrow{\;\cong\;} \mathrm{Hom}_A\left(M, N_f\right) \\
\varphi &\longmapsto [m \mapsto \varphi(m \otimes_A 1_B)] \\
[m \otimes_A b \mapsto \psi(m)b] &\longleftarrow\!\!\shortmid\; \psi
\end{aligned}$$

Cioè , *il funtore $\mathcal{L}$ è aggiunto sx al funtore $\mathcal{R}$*.

Teorema (Morita, 1965)

$f : A \to B$ è di Frobenius se e solo se vale anche

$$\mathrm{Hom}_A\left(N_f, M\right) \cong \mathrm{Hom}_B\left(N, M \otimes_A B\right),$$

cioè , $\mathcal{L}$ è anche aggiunto dx di $\mathcal{R}$.

- Una categoria $\mathcal{C}$ è una collezione di oggetti e di morfismi tra questi (soddisfacenti certe proprietà). Ad esempio, i moduli su un anello ed i rispettivi morfismi lineari.
- Un funtore $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un morfismo di categorie: assegna oggetti a oggetti, morfismi a morfismi e rispetta le proprietà . E.g., il funtore $- \otimes_A B$ che manda A-moduli M in B-moduli $M \otimes_A B$ e morfismi A-lineari $f : M \to M'$ in morfismi B-lineari $f \otimes_A B : M \otimes_A B \to M' \otimes_A B$.
- Dati $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una trasformazione naturale η da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ è una famiglia $\{\eta_C : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{G}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ tale che

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(C) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & \mathcal{G}(C') \end{tikzcd} \qquad \forall f : C \to C' \text{ in } \mathcal{C}.$$

- Una categoria $\mathcal{C}$ è una collezione di oggetti e di morfismi tra questi (soddisfacenti certe proprietà). Ad esempio, i moduli su un anello ed i rispettivi morfismi lineari.
- Un funtore $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un morfismo di categorie: assegna oggetti a oggetti, morfismi a morfismi e rispetta le proprietà . E.g., il funtore $- \otimes_A B$ che manda A-moduli M in B-moduli $M \otimes_A B$ e morfismi A-lineari $f : M \to M'$ in morfismi B-lineari $f \otimes_A B : M \otimes_A B \to M' \otimes_A B$.
- Dati $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una trasformazione naturale η da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ è una famiglia $\{\eta_C : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{G}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ tale che

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(C) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & \mathcal{G}(C') \end{tikzcd} \qquad \forall f : C \to C' \text{ in } \mathcal{C}.$$

- Una categoria $\mathcal{C}$ è una collezione di oggetti e di morfismi tra questi (soddisfacenti certe proprietà). Ad esempio, i moduli su un anello ed i rispettivi morfismi lineari.
- Un funtore $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un morfismo di categorie: assegna oggetti a oggetti, morfismi a morfismi e rispetta le proprietà . E.g., il funtore $- \otimes_A B$ che manda A-moduli M in B-moduli $M \otimes_A B$ e morfismi A-lineari $f : M \to M'$ in morfismi B-lineari $f \otimes_A B : M \otimes_A B \to M' \otimes_A B$.
- Dati $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una trasformazione naturale η da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ è una famiglia $\{\eta_C : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{G}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ tale che

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(C) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & \mathcal{G}(C') \end{tikzcd} \qquad \forall f : C \to C' \text{ in } \mathcal{C}.$$

- Una categoria $\mathcal{C}$ è una collezione di oggetti e di morfismi tra questi (soddisfacenti certe proprietà). Ad esempio, i moduli su un anello ed i rispettivi morfismi lineari.
- Un funtore $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un morfismo di categorie: assegna oggetti a oggetti, morfismi a morfismi e rispetta le proprietà . E.g., il funtore $- \otimes_A B$ che manda A-moduli M in B-moduli $M \otimes_A B$ e morfismi A-lineari $f : M \to M'$ in morfismi B-lineari $f \otimes_A B : M \otimes_A B \to M' \otimes_A B$.
- Dati $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una trasformazione naturale η da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ è una famiglia $\{\eta_C : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{G}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ tale che

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(C) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & \mathcal{G}(C') \end{tikzcd} \qquad \forall f : C \to C' \text{ in } \mathcal{C}.$$

- Una categoria $\mathcal{C}$ è una collezione di oggetti e di morfismi tra questi (soddisfacenti certe proprietà). Ad esempio, i moduli su un anello ed i rispettivi morfismi lineari.
- Un funtore $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un morfismo di categorie: assegna oggetti a oggetti, morfismi a morfismi e rispetta le proprietà . E.g., il funtore $- \otimes_A B$ che manda A-moduli M in B-moduli $M \otimes_A B$ e morfismi A-lineari $f : M \to M'$ in morfismi B-lineari $f \otimes_A B : M \otimes_A B \to M' \otimes_A B$.
- Dati $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una trasformazione naturale η da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ è una famiglia $\{\eta_C : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{G}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ tale che

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G}(C) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & \mathcal{G}(C') \end{tikzcd} \qquad \forall f : C \to C' \text{ in } \mathcal{C}.$$

- $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è aggiunto sinistro a $\mathcal{R} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ se esiste

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{L}(C), D\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C, \mathcal{R}(D)\right) \qquad \forall\, C, D$$

naturale in $C \in \mathcal{C}$ e $D \in \mathcal{D}$. Equivalentemente, se esistono

$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{R}\mathcal{L} \quad \text{e} \quad \epsilon : \mathcal{L}\mathcal{R} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$

naturali tali che per ogni $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{L}(C) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{L}(C)}"] & \mathcal{L}(C) \\
\mathcal{L}(C) \arrow[u, "\mathcal{L}(\eta_C)"] \arrow[ur, "="'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft" near end, shift left=3ex] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}(D) \arrow[r, "\mathcal{R}(\epsilon_D)"] & \mathcal{R}(D) \\
\mathcal{R}(D) \arrow[u, "\eta_{\mathcal{R}(D)}"] \arrow[ur, "="'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft" near end, shift left=3ex] &
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{L}$ è una equivalenza di categorie con quasi-inversa $\mathcal{R}$ se η_C e ϵ_D sono isomorfismi per ogni $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$.
- $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore di Frobenius se ammette un aggiunto $\mathcal{G}$ sia sinistro che destro.

- $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è aggiunto sinistro a $\mathcal{R} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ se esiste

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{L}(C), D\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C, \mathcal{R}(D)\right) \qquad \forall\, C, D$$

naturale in $C \in \mathcal{C}$ e $D \in \mathcal{D}$. Equivalentemente, se esistono

$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{R}\mathcal{L} \quad \text{ e } \quad \epsilon : \mathcal{L}\mathcal{R} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$

naturali tali che per ogni $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{L}(C) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{L}(C)}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{L}(C) \\ \mathcal{L}(C) \arrow[u, "\mathcal{L}(\eta_C)"] \arrow[ur, "="'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}(D) \arrow[r, "\mathcal{R}(\epsilon_D)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{R}(D) \\ \mathcal{R}(D) \arrow[u, "\eta_{\mathcal{R}(D)}"] \arrow[ur, "="'] & \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{L}$ è una equivalenza di categorie con quasi-inversa $\mathcal{R}$ se η_C e ϵ_D sono isomorfismi per ogni $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$.
- $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore di Frobenius se ammette un aggiunto $\mathcal{G}$ sia sinistro che destro.

- $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è aggiunto sinistro a $\mathcal{R} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ se esiste

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{L}(C), D\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C, \mathcal{R}(D)\right) \qquad \forall\, C, D$$

naturale in $C \in \mathcal{C}$ e $D \in \mathcal{D}$. Equivalentemente, se esistono

$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{RL} \quad \text{e} \quad \epsilon : \mathcal{LR} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$

naturali tali che per ogni $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{LRL}(C) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{L}(C)}"] & \mathcal{L}(C) \\
\mathcal{L}(C) \arrow[u, "\mathcal{L}(\eta_C)"] \arrow[ur, "="'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3ex] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{RLR}(D) \arrow[r, "\mathcal{R}(\epsilon_D)"] & \mathcal{R}(D) \\
\mathcal{R}(D) \arrow[u, "\eta_{\mathcal{R}(D)}"] \arrow[ur, "="'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3ex] &
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{L}$ è una equivalenza di categorie con quasi-inversa $\mathcal{R}$ se η_C e ϵ_D sono isomorfismi per ogni $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$.
- $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore di Frobenius se ammette un aggiunto $\mathcal{G}$ sia sinistro che destro.

- $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è aggiunto sinistro a $\mathcal{R} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ se esiste

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{L}(C), D\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(C, \mathcal{R}(D)\right) \qquad \forall\, C, D$$

naturale in $C \in \mathcal{C}$ e $D \in \mathcal{D}$. Equivalentemente, se esistono

$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{R}\mathcal{L} \quad \text{e} \quad \epsilon : \mathcal{L}\mathcal{R} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$$

naturali tali che per ogni $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{L}(C) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{L}(C)}"] & \mathcal{L}(C) \\
\mathcal{L}(C) \arrow[u, "\mathcal{L}(\eta_C)"] \arrow[ur, "="'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", pos=0.3, shift left=3ex] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}(D) \arrow[r, "\mathcal{R}(\epsilon_D)"] & \mathcal{R}(D) \\
\mathcal{R}(D) \arrow[u, "\eta_{\mathcal{R}(D)}"] \arrow[ur, "="'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", pos=0.3, shift left=3ex] &
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{L}$ è una equivalenza di categorie con quasi-inversa $\mathcal{R}$ se η_C e ϵ_D sono isomorfismi per ogni $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$.
- $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore di Frobenius se ammette un aggiunto $\mathcal{G}$ sia sinistro che destro.

Algebre di Hopf (e gruppi)

- (M, μ, e) monoide affine e $\Bbbk[M]$ anello delle coordinate.
- Per precomposizione,
  - μ induce $\Delta : \Bbbk[M] \to \Bbbk[M \times M] \cong \Bbbk[M] \otimes \Bbbk[M]$;
  - e induce $\varepsilon : \Bbbk[M] \to \Bbbk$.

Definizione

Una bialgebra è un'algebra H con $\Delta : H \to H \otimes H, \varepsilon : H \to \Bbbk$ t.c.

$$(\Delta \otimes H) \circ \Delta = (H \otimes \Delta) \circ \Delta \qquad \text{e}$$
$$(\varepsilon \otimes H) \circ \Delta = H = (H \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

Una bialgebra è un'algebra di Hopf sse esiste $S : H \to H$ t.c.

$$m \circ (S \otimes H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (H \otimes S) \circ \Delta.$$

- $\Bbbk[M]$ è algebra di Hopf sse M è gruppo.

Algebre di Hopf (e gruppi)

- (M, μ, e) monoide affine e $\Bbbk[M]$ anello delle coordinate.
- Per precomposizione,
  - μ induce $\Delta : \Bbbk[M] \to \Bbbk[M \times M] \cong \Bbbk[M] \otimes \Bbbk[M]$;
  - e induce $\varepsilon : \Bbbk[M] \to \Bbbk$.

Definizione

Una bialgebra è un'algebra H con $\Delta : H \to H \otimes H, \varepsilon : H \to \Bbbk$ t.c.

$$(\Delta \otimes H) \circ \Delta = (H \otimes \Delta) \circ \Delta \qquad \text{e}$$
$$(\varepsilon \otimes H) \circ \Delta = H = (H \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

Una bialgebra è un'algebra di Hopf sse esiste $S : H \to H$ t.c.

$$m \circ (S \otimes H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (H \otimes S) \circ \Delta.$$

- $\Bbbk[M]$ è algebra di Hopf sse M è gruppo.

- (M, μ, e) monoide affine e $\Bbbk[M]$ anello delle coordinate.
- Per precomposizione,
  - μ induce $\Delta : \Bbbk[M] \to \Bbbk[M \times M] \cong \Bbbk[M] \otimes \Bbbk[M]$;
  - e induce $\varepsilon : \Bbbk[M] \to \Bbbk$.

Definizione

Una bialgebra è un'algebra H con $\Delta : H \to H \otimes H, \varepsilon : H \to \Bbbk$ t.c.

$$(\Delta \otimes H) \circ \Delta = (H \otimes \Delta) \circ \Delta \qquad \text{e}$$
$$(\varepsilon \otimes H) \circ \Delta = H = (H \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

Una bialgebra è un'algebra di Hopf sse esiste $S : H \to H$ t.c.

$$m \circ (S \otimes H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (H \otimes S) \circ \Delta.$$

- $\Bbbk[M]$ è algebra di Hopf sse M è gruppo.

Algebre di Hopf (e gruppi)

- (M, μ, e) monoide affine e $\Bbbk[M]$ anello delle coordinate.
- Per precomposizione,
  - μ induce $\Delta : \Bbbk[M] \to \Bbbk[M \times M] \cong \Bbbk[M] \otimes \Bbbk[M]$;
  - e induce $\varepsilon : \Bbbk[M] \to \Bbbk$.

Definizione

Una bialgebra è un'algebra H con $\Delta : H \to H \otimes H, \varepsilon : H \to \Bbbk$ t.c.

$$(\Delta \otimes H) \circ \Delta = (H \otimes \Delta) \circ \Delta \qquad \text{e}$$
$$(\varepsilon \otimes H) \circ \Delta = H = (H \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

Una bialgebra è un'algebra di Hopf sse esiste $S : H \to H$ t.c.

$$m \circ (S \otimes H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (H \otimes S) \circ \Delta.$$

- $\Bbbk[M]$ è algebra di Hopf sse M è gruppo.

- (M, μ, e) monoide affine e $\Bbbk[M]$ anello delle coordinate.
- Per precomposizione,
  - μ induce $\Delta : \Bbbk[M] \to \Bbbk[M \times M] \cong \Bbbk[M] \otimes \Bbbk[M]$;
  - e induce $\varepsilon : \Bbbk[M] \to \Bbbk$.

Definizione

Una bialgebra è un'algebra H con $\Delta : H \to H \otimes H, \varepsilon : H \to \Bbbk$ t.c.

$$(\Delta \otimes H) \circ \Delta = (H \otimes \Delta) \circ \Delta \qquad \text{e}$$
$$(\varepsilon \otimes H) \circ \Delta = H = (H \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

Una bialgebra è un'algebra di Hopf sse esiste $S : H \to H$ t.c.

$$m \circ (S \otimes H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (H \otimes S) \circ \Delta.$$

- $\Bbbk[M]$ è algebra di Hopf sse M è gruppo.

- Un modulo (sx) su H è uno spazio vettoriale M su $\Bbbk$ con $\mu : H \otimes M \to M$ lineare tale che

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \otimes M \arrow[r, "H\otimes\mu"] \arrow[d, "m\otimes M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \otimes M \arrow[d, "\mu"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft", shift right=4] & M \arrow[l, "u\otimes M"'] \arrow[dl, "="] \\ H \otimes M \arrow[r, "\mu"] & M & \end{tikzcd}$$

- Un comodulo (sx) su H è uno spazio vettoriale N su $\Bbbk$ con $\delta : N \to H \otimes N$ lineare tale che

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \otimes N \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \otimes N \arrow[l, "H\otimes\delta"'] \arrow[r, "\varepsilon\otimes N"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft", shift right=4] & N \\ H \otimes N \arrow[u, "\Delta\otimes N"] & N \arrow[l, "\delta"'] \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "="'] & \end{tikzcd}$$

- Un modulo (sx) su H è uno spazio vettoriale M su $\Bbbk$ con $\mu : H \otimes M \to M$ lineare tale che

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes M \arrow[r, "H\otimes\mu"] \arrow[d, "m\otimes M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \otimes M \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[l, "u\otimes M"'] \arrow[dl, "="] \\
H \otimes M \arrow[r, "\mu"] & M &
\end{tikzcd}
$$

- Un comodulo (sx) su H è uno spazio vettoriale N su $\Bbbk$ con $\delta : N \to H \otimes N$ lineare tale che

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes N \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \otimes N \arrow[l, "H\otimes\delta"'] \arrow[r, "\varepsilon\otimes N"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \\
H \otimes N \arrow[u, "\Delta\otimes N"] & N \arrow[l, "\delta"'] \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "="'] &
\end{tikzcd}
$$

- Un modulo di Hopf (sx) M su H è un modulo ed un comodulo allo stesso tempo tale che

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes M \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "H\otimes\delta"'] & & M \arrow[d, "\delta"] \\
H \otimes H \otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes H\otimes M"'] & \circlearrowleft & H \otimes M \\
H \otimes H \otimes H \otimes M \arrow[rr, "H\otimes\tau\otimes M"'] & & H \otimes H \otimes H \otimes M \arrow[u, "m\otimes\mu"']
\end{tikzcd}
$$

Teorema (Teorema di Struttura per i moduli di Hopf)

H è algebra di Hopf sse $M \cong H \otimes M^{\mathrm{co}H}$ per ogni $M \in {}^H_H\mathrm{Mod}$, dove $M^{\mathrm{co}H} := \{m \in M \mid \delta(m) = 1 \otimes m\}$.

$$\eta_M : M \to H \otimes \overline{M}$$
$$\epsilon_V : \overline{H \otimes V} \xrightarrow{\cong} V$$

$$\begin{tikzcd} {}^H_H\mathrm{Mod} \arrow[d, bend left, "(-)^{\mathrm{co}H}"] \\ \mathrm{Vec}_{\Bbbk} \arrow[u, "H\otimes -"] \end{tikzcd}$$

$$\gamma_V : V \xrightarrow{\cong} (H \otimes V)^{\mathrm{co}H}$$
$$\theta_M : H \otimes M^{\mathrm{co}H} \to M$$

H è Hopf sse $H \otimes -$ è un'equivalenza, sse η o θ è iso.

Questione: E se invece $H \otimes -$ fosse solo Frobenius?

- Equivalentemente: e se $\sigma = \gamma^{-1} \circ \eta^{\mathrm{co}H}$,

$$\sigma_M : M^{\mathrm{co}H} \to \overline{M},\, m \mapsto \overline{m},$$

fosse un isomorfismo per ogni M?

Teorema (Teorema di Struttura per i moduli di Hopf)

H è algebra di Hopf sse $M \cong H \otimes M^{\mathrm{co}H}$ per ogni $M \in {}^H_H\mathrm{Mod}$, dove $M^{\mathrm{co}H} := \{m \in M \mid \delta(m) = 1 \otimes m\}$.

$$\eta_M : M \to H \otimes \overline{M} \qquad \epsilon_V : \overline{H \otimes V} \xrightarrow{\cong} V$$

$$\begin{tikzcd} {}^H_H\mathrm{Mod} \arrow[d, bend left, "(-)^{\mathrm{co}H}"] \\ \mathrm{Vec}_{\Bbbk} \arrow[u, "H\otimes -"] \end{tikzcd}$$

$$\gamma_V : V \xrightarrow{\cong} (H \otimes V)^{\mathrm{co}H}$$

$$\theta_M : H \otimes M^{\mathrm{co}H} \to M$$

H è Hopf sse $H \otimes -$ è un'equivalenza, sse η o θ è iso.

Questione: E se invece $H \otimes -$ fosse solo Frobenius?

- Equivalentemente: e se $\sigma = \gamma^{-1} \circ \eta^{\mathrm{co}H}$,

$$\sigma_M : M^{\mathrm{co}H} \to \overline{M}, m \mapsto \overline{m},$$

fosse un isomorfismo per ogni M?

Teorema (Teorema di Struttura per i moduli di Hopf)

H è algebra di Hopf sse $M \cong H \otimes M^{\mathrm{co}H}$ per ogni $M \in {}^H_H\mathrm{Mod}$, dove $M^{\mathrm{co}H} := \{m \in M \mid \delta(m) = 1 \otimes m\}$.

$$\eta_M : M \to H \otimes \overline{M} \qquad \epsilon_V : \overline{H \otimes V} \xrightarrow{\cong} V$$

$$\begin{tikzcd} {}^H_H\mathrm{Mod} \arrow[d, bend right=60, "\overline{(-)}"'] \arrow[d, bend left=60, "(-)^{\mathrm{co}H}"] \\ \mathrm{Vec}_{\Bbbk} \arrow[u, "H\otimes -"'] \end{tikzcd}$$

$$\gamma_V : V \xrightarrow{\cong} (H \otimes V)^{\mathrm{co}H} \qquad \theta_M : H \otimes M^{\mathrm{co}H} \to M$$

H è Hopf sse $H \otimes -$ è un'equivalenza, sse η o θ è iso.

Questione: E se invece $H \otimes -$ fosse solo Frobenius?

- Equivalentemente: e se $\sigma = \gamma^{-1} \circ \eta^{\mathrm{co}H}$,

$$\sigma_M : M^{\mathrm{co}H} \to \overline{M}, m \mapsto \overline{m},$$

fosse un isomorfismo per ogni M?

Teorema (Teorema di Struttura per i moduli di Hopf)

H è algebra di Hopf sse $M \cong H \otimes M^{\mathrm{co}H}$ per ogni $M \in {}^H_H\mathrm{Mod}$, dove $M^{\mathrm{co}H} := \{m \in M \mid \delta(m) = 1 \otimes m\}$.

$$\eta_M : M \to H \otimes \overline{M} \qquad \epsilon_V : \overline{H \otimes V} \xrightarrow{\cong} V$$

$$\begin{tikzcd} {}^H_H\mathrm{Mod} \arrow[d, bend right, "\overline{(-)}"'] \arrow[d, bend left, "(-)^{\mathrm{co}H}"] \\ \mathrm{Vec}_{\Bbbk} \arrow[u, "H\otimes -"] \end{tikzcd}$$

$$\gamma_V : V \xrightarrow{\cong} (H \otimes V)^{\mathrm{co}H} \qquad \theta_M : H \otimes M^{\mathrm{co}H} \to M$$

H è Hopf sse $H \otimes -$ è un'equivalenza, sse η o θ è iso.

Questione: E se invece $H \otimes -$ fosse solo Frobenius?

- Equivalentemente: e se $\sigma = \gamma^{-1} \circ \eta^{\mathrm{co}H}$,

$$\sigma_M : M^{\mathrm{co}H} \to \overline{M},\ m \mapsto \overline{m},$$

fosse un isomorfismo per ogni M?

Teorema (Teorema di Struttura per i moduli di Hopf)

H è algebra di Hopf sse $M \cong H \otimes M^{\mathrm{co}H}$ per ogni $M \in {}^H_H\mathrm{Mod}$, dove $M^{\mathrm{co}H} := \{m \in M \mid \delta(m) = 1 \otimes m\}$.

$$\eta_M : M \to H \otimes \overline{M} \qquad \epsilon_V : \overline{H \otimes V} \xrightarrow{\cong} V$$

$$\begin{tikzcd} {}^H_H\mathrm{Mod} \arrow[d, bend right=60, "\overline{(-)}"'] \arrow[d, bend left=60, "(-)^{\mathrm{co}H}"] \\ \mathrm{Vec}_{\Bbbk} \arrow[u, "H\otimes -" description] \end{tikzcd}$$

$$\gamma_V : V \xrightarrow{\cong} (H \otimes V)^{\mathrm{co}H} \qquad \theta_M : H \otimes M^{\mathrm{co}H} \to M$$

H è Hopf sse $H \otimes -$ è un'equivalenza, sse η o θ è iso.

Questione: E se invece $H \otimes -$ fosse solo Frobenius?

- Equivalentemente: e se $\sigma = \gamma^{-1} \circ \eta^{\mathrm{co}H}$,

$$\sigma_M : M^{\mathrm{co}H} \to \overline{M}, m \mapsto \overline{m},$$

fosse un isomorfismo per ogni M?

Teorema (Teorema di Struttura per i moduli di Hopf)

H è algebra di Hopf sse $M \cong H \otimes M^{\mathrm{co}H}$ per ogni $M \in {}^H_H\mathrm{Mod}$, dove $M^{\mathrm{co}H} := \{m \in M \mid \delta(m) = 1 \otimes m\}$.

$$\eta_M : M \to H \otimes \overline{M} \qquad \epsilon_V : \overline{H \otimes V} \xrightarrow{\cong} V$$

$$\begin{tikzcd} {}^H_H\mathrm{Mod} \arrow[d, bend right, "\overline{(-)}"'] \arrow[d, bend left, "(-)^{\mathrm{co}H}"] \\ \mathrm{Vec}_\Bbbk \arrow[u, "H\otimes -" description] \end{tikzcd}$$

$$\gamma_V : V \xrightarrow{\cong} (H \otimes V)^{\mathrm{co}H} \qquad \theta_M : H \otimes M^{\mathrm{co}H} \to M$$

H è Hopf sse $H \otimes -$ è un'equivalenza, sse η o θ è iso.

Questione: E se invece $H \otimes -$ fosse solo Frobenius?

- Equivalentemente: e se $\sigma = \gamma^{-1} \circ \eta^{\mathrm{co}H}$,

$$\sigma_M : M^{\mathrm{co}H} \to \overline{M}, m \mapsto \overline{m},$$

fosse un isomorfismo per ogni M?

L'idea

Assumiamo σ_M^{-1} esista. $H \mathbin{\widehat{\otimes}} H := H \otimes H$ con

$$a \cdot (x \otimes y) = \Delta(a)(x \otimes y) \quad \text{e} \quad \delta(x \otimes y) = \Delta(x) \otimes y.$$

Lemma

$S : H \to H$ definita da $S(x) := (\varepsilon \otimes H)\left(\sigma^{-1}_{H \widehat{\otimes} H}\left(\overline{x \otimes 1}\right)\right)$.

$$\begin{array}{llll} (1) & S(1) = 1 & e & \varepsilon \circ S = \varepsilon, \\ (2) & S \circ m = m^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S) & e & \Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{op}}, \\ (3) & & m \circ (S \otimes H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon & \end{array}$$

quindi H è algebra di Hopf sinistra.

Assumiamo σ_M^{-1} esista. $H \mathbin{\widehat{\otimes}} H := H \otimes H$ con

$$a \cdot (x \otimes y) = \Delta(a)(x \otimes y) \text{ e } \delta(x \otimes y) = \Delta(x) \otimes y.$$

Lemma

$S : H \to H$ definita da $S(x) := (\varepsilon \otimes H)\left(\sigma^{-1}_{H \mathbin{\widehat{\otimes}} H}\left(\overline{x \otimes 1}\right)\right)$.

$$\begin{array}{ll} (1) & S(1) = 1 \quad e \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon, \\ (2) & S \circ m = m^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S) \quad e \quad \Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{op}}, \\ (3) & m \circ (S \otimes H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon \end{array}$$

quindi H è algebra di Hopf sinistra.

Assumiamo σ_M^{-1} esista. $H \mathbin{\widehat{\otimes}} H := H \otimes H$ con

$$a \cdot (x \otimes y) = \Delta(a)(x \otimes y) \ \text{ e } \ \delta(x \otimes y) = \Delta(x) \otimes y.$$

Lemma

$S : H \to H$ definita da $S(x) := (\varepsilon \otimes H)\left(\sigma^{-1}_{H \mathbin{\widehat{\otimes}} H}\left(\overline{x \otimes 1}\right)\right).$

$$\begin{array}{ll} (1) & S(1) = 1 \quad e \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon, \\ (2) & S \circ m = m^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S) \quad e \quad \Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{op}}, \\ (3) & m \circ (S \otimes H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon \end{array}$$

quindi H è algebra di Hopf sinistra.

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è un'algebra di Hopf sinistra con antipodo sinistro S che è sia anti-moltiplicativo che anti-comoltiplicativo.*
- *$H \otimes -$ è un funtore di Frobenius.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile.*

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è Hopf.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile e o $\theta_{H \widehat{\otimes} H}$ è suriettiva o $\eta_{H \widehat{\otimes} H}$ è iniettiva.*

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è un'algebra di Hopf sinistra con antipodo sinistro S che è sia anti-moltiplicativo che anti-comoltiplicativo.*
- *$H \otimes -$ è un funtore di Frobenius.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile.*

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è Hopf.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile e o $\theta_{H \widehat{\otimes} H}$ è suriettiva o $\eta_{H \widehat{\otimes} H}$ è iniettiva.*

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è un'algebra di Hopf sinistra con antipodo sinistro S che è sia anti-moltiplicativo che anti-comoltiplicativo.*
- *$H \otimes -$ è un funtore di Frobenius.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile.*

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è Hopf.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile e o $\theta_{H \widehat{\otimes} H}$ è suriettiva o $\eta_{H \widehat{\otimes} H}$ è iniettiva.*

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è un'algebra di Hopf sinistra con antipodo sinistro S che è sia anti-moltiplicativo che anti-comoltiplicativo.*
- *$H \otimes -$ è un funtore di Frobenius.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile.*

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è Hopf.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile e o $\theta_{H \widehat{\otimes} H}$ è suriettiva o $\eta_{H \widehat{\otimes} H}$ è iniettiva.*

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è un'algebra di Hopf sinistra con antipodo sinistro S che è sia anti-moltiplicativo che anti-comoltiplicativo.*
- *$H \otimes -$ è un funtore di Frobenius.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile.*

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

- *H è Hopf.*
- *$\sigma_{H \widehat{\otimes} H}$ è invertibile e o $\theta_{H \widehat{\otimes} H}$ è suriettiva o $\eta_{H \widehat{\otimes} H}$ è iniettiva.*

Esempio

$B := \mathbb{C}[X]$ con $\Delta(X) = X \otimes X$, $\varepsilon(X) = 1$.

- un B-modulo è uno spazio vettoriale V con $\xi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.
- un B-comodulo è uno spazio vettoriale $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$.
- $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$ con ξ è di Hopf sse $\xi(V_n) \subseteq V_{n+1}$, $\forall\, n$.

$$(B \mathbin{\widehat{\otimes}} B)^{\mathrm{co}B} \cong B = \mathbb{C}[X],$$

$$\overline{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} \cong \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{\langle XY - 1 \rangle} \cong \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y],$$

$$\sigma_{B \widehat{\otimes} B} : \mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y].$$

Esempio

$B := \mathbb{C}[X]$ con $\Delta(X) = X \otimes X$, $\varepsilon(X) = 1$.

- un B-modulo è uno spazio vettoriale V con $\xi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.
- un B-comodulo è uno spazio vettoriale $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$.
- $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ con ξ è di Hopf sse $\xi(V_n) \subseteq V_{n+1}$, $\forall\, n$.

$$(B \mathbin{\widehat{\otimes}} B)^{\mathrm{co}B} \cong B = \mathbb{C}[X],$$

$$\overline{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} \cong \frac{\mathbb{C}[X,Y]}{\langle XY - 1\rangle} \cong \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y],$$

$$\sigma_{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} : \mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y].$$

Primo (non) esempio

Esempio

$B := \mathbb{C}[X]$ con $\Delta(X) = X \otimes X$, $\varepsilon(X) = 1$.

- un B-modulo è uno spazio vettoriale V con $\xi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.
- un B-comodulo è uno spazio vettoriale $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$.
- $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ con ξ è di Hopf sse $\xi(V_n) \subseteq V_{n+1}$, $\forall\, n$.

$$(B \mathbin{\widehat{\otimes}} B)^{\mathrm{co}B} \cong B = \mathbb{C}[X],$$

$$\overline{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} \cong \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{\langle XY - 1\rangle} \cong \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y],$$

$$\sigma_{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} : \mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y].$$

Esempio

$B := \mathbb{C}[X]$ con $\Delta(X) = X \otimes X$, $\varepsilon(X) = 1$.

- un B-modulo è uno spazio vettoriale V con $\xi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.
- un B-comodulo è uno spazio vettoriale $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$.
- $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ con ξ è di Hopf sse $\xi(V_n) \subseteq V_{n+1}$, $\forall\, n$.

$$(B \mathbin{\widehat{\otimes}} B)^{\mathrm{co}B} \cong B = \mathbb{C}[X],$$

$$\overline{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} \cong \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{\langle XY - 1\rangle} \cong \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y],$$

$$\sigma_{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} : \mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y].$$

Esempio

$B := \mathbb{C}[X]$ con $\Delta(X) = X \otimes X$, $\varepsilon(X) = 1$.

- un B-modulo è uno spazio vettoriale V con $\xi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.
- un B-comodulo è uno spazio vettoriale $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$.
- $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$ con ξ è di Hopf sse $\xi(V_n) \subseteq V_{n+1}$, $\forall\, n$.

$$(B \mathbin{\widehat{\otimes}} B)^{\mathrm{co}B} \cong B = \mathbb{C}[X],$$
$$\overline{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} \cong \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{\langle XY - 1 \rangle} \cong \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y],$$
$$\sigma_{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} : \mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y].$$

Esempio

$B := \mathbb{C}[X]$ con $\Delta(X) = X \otimes X$, $\varepsilon(X) = 1$.

- un B-modulo è uno spazio vettoriale V con $\xi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.
- un B-comodulo è uno spazio vettoriale $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$.
- $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$ con ξ è di Hopf sse $\xi(V_n) \subseteq V_{n+1}$, $\forall\, n$.

$$(B \mathbin{\widehat{\otimes}} B)^{\mathrm{co}B} \cong B = \mathbb{C}[X],$$

$$\overline{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} \cong \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{\langle XY - 1 \rangle} \cong \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y],$$

$$\sigma_{B \mathbin{\widehat{\otimes}} B} : \mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[Y].$$

Esempio (Lauve, Taft [LT])

$q \in \mathbb{C}^\times$

$$\mathrm{SL}'_q(2) := \frac{\mathbb{C}\langle X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}\rangle}{\left\langle \begin{array}{c} X_{21}X_{11} - qX_{11}X_{21},\ X_{22}X_{11} - qX_{12}X_{21} - 1 \\ X_{22}X_{12} - qX_{12}X_{22},\ X_{21}X_{12} - qX_{11}X_{22} - q \end{array} \right\rangle}$$

è un'algebra di Hopf sinistra che NON è un'algebra di Hopf.

- Esistono bialgebre B per cui $B \otimes -$ è Frobenius ma non un'equivalenza.

[LT] A. Lauve, E. J. Taft, *A class of left quantum groups modeled after* $\mathrm{SL}_q(n)$, J. Pure Appl. Algebra **208**(3) (2007).

Esempio (Lauve, Taft [LT])

$q \in \mathbb{C}^\times$

$$\mathrm{SL}'_q(2) := \frac{\mathbb{C}\langle X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}\rangle}{\left\langle \begin{array}{c} X_{21}X_{11} - qX_{11}X_{21},\ X_{22}X_{11} - qX_{12}X_{21} - 1 \\ X_{22}X_{12} - qX_{12}X_{22},\ X_{21}X_{12} - qX_{11}X_{22} - q \end{array} \right\rangle}$$

è un'algebra di Hopf sinistra che NON è un'algebra di Hopf.

- Esistono bialgebre B per cui $B \otimes -$ è Frobenius ma non un'equivalenza.

[LT] A. Lauve, E. J. Taft, *A class of left quantum groups modeled after* $\mathrm{SL}_q(n)$, J. Pure Appl. Algebra **208**(3) (2007).

Grazie