

Physique Mathématique: Séance 1

La corde vibrante

Considérons une corde vibrante de longueur $L = \pi$, fixée aux extrémités, dont l'élongation $u(x, t)$ satisfait à l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec } 0 \leq x \leq \pi \text{ et } t \geq 0.$$

Les conditions initiales en $t = 0$ sont données par

$$\begin{cases} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) |_{t=0} &= g(x). \end{cases}$$

- Déterminer la solution de cette équation pour l'exemple d'une corde pincée (pensez par exemple à une guitare):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xh}{p}, & 0 \leq x \leq p \\ \frac{h(\pi - x)}{\pi - p}, & p \leq x \leq \pi \end{cases} \quad g(x) = 0.$$

Vérifier que les coefficients de Fourier de la solution sont donnés par

$$A_m = \frac{2h}{m^2} \frac{\sin mp}{p(\pi - p)}$$

et que donc la série converge. Comment annuler les harmoniques paires en choisissant l'endroit où l'on pince la corde?

- Même question pour les conditions initiales suivantes

$$f(x) = 0 \quad g(x) = \begin{cases} k, & x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ 0, & x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \end{cases}$$

qui simulent la frappe du marteau d'un piano. Comment éviter la présence de la septième harmonique, acoustiquement gênante?