Physique Mathématique: Séance 2

Le problème de Dirichlet dans le disque

Notons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ le disque unité et $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ le bord du disque, c'est-à-dire le cercle unité. Rappelons qu'en coordonnées cartésiennes le Laplacien s'écrit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Une fonction réelle sur le disque $u : D \to \mathbb{R}$ est appelée harmonique si $\Delta u = 0$. Pour tout choix de fonction réelle sur le cercle unité $f : \partial D \to \mathbb{R}$, le problème de Dirichlet s'écrit:

$$\begin{cases} \Delta u & = & 0 \\ u|_{\partial D} & = & f \end{cases}$$

La question devient: existe-il, pour tout choix de fonction f sur le bord du disque, une fonction harmonique u définie sur tout le disque qui "remplit f" ? Si oui, est-ce qu'elle est unique?

Aide:

1. La condition de bord nous suggère de passer en coordonnées polaires. Montrer que le Laplacien s'écrit dans ces coordonnées comme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

2. Si on procède par séparation de variables, il faut résoudre l'équation

$$r^2 F''(r) + rF'(r) - m^2 F(r) = 0 \quad \text{où } m \in \mathbb{Z} \text{ et } r \in [0, 1].$$

   Montrer que la solution est de la forme

$$F(r) = \begin{cases} c_1 \ln r + c_2 & \text{si } m = 0 \\ c_1 r^{-m} + c_2 r^m & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

3. Montrer que la fonction harmonique

$$u(r, \theta) = \frac{2}{\pi} + r\sin(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4r^{2m}}{\pi(4m^2 - 1)} \cos(2m\theta)$$

   remplit la fonction

$$f(\theta) = \begin{cases} 2\sin(\theta) & \text{si } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 & \text{si } \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$