Physique Mathématique: Séance 3

La recette de l'oeuf à la Fourier

Considérons un oeuf sphérique homogène de rayon π dont la température initiale est partout de 20°C. On le plonge dans de l'eau bouillante de façon à chauffer uniformément la coquille à 100° C. Combien de temps faut-il attendre avant que la température au centre de l'oeuf atteigne 50° C? On va supposer que la température $u(x,t)$ obéit à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \triangle u$$

avec une constante de diffusion $k = 6 \times 10^{-3} \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}}$.

Aide:

1. La condition de bord nous suggère de passer en coordonnées sphériques. Montrer que le Laplacien s'écrit dans ces coordonnées comme

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

2. Si on procède par séparation de variables, il faut résoudre l'équation

$$F''(r) + \frac{2}{r}F'(r) + m^2 F(r) = 0 \quad \text{où } m \in \mathbb{Z} \text{ et } r \in [0,\pi].$$

   Montrer que la solution est de la forme

$$F(r) = \begin{cases} c_1 \ln(r) + c_2 & \text{si } m = 0 \\ c_1 \frac{\cos(mr)}{r} + c_2 \frac{\sin(mr)}{r} & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

3. Montrer que la température de l'oeuf vaut

$$u(r,t) = 100 + 160 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{\sin(mr)}{r} e^{-km^2 t}.$$

4. Déduire qu'il faut attendre environ 190 secondes avant que la température au centre de l'oeuf atteigne 50° C. J'offre une tablette de chocolat à celui qui me donne une solution exacte.