Titulaire: Christine De Mol Assistant: Patrick Weber

Physique Mathématique: Séance 4

Le problème de Bâle

Le problème de Bâle a été proposé la première fois en 1644 par le mathématicien italien Pietro Mengoli, puis résolu par le mathématicien suisse Leonhard Euler, dont Bâle est la ville natale. Voici l'introduction du papier d'Euler (traduite par A. Weil):

So much work has been done on the series $\zeta(n)$ that it seems hardly likely that anything new about them may still turn up... I, too, in spite of repeated efforts, could achieve nothing more than approximate values for their sums... Now, however, quite unexpectantly, I have found an elegant formula for $\zeta(2)$, depending on the quadrature of a circle.

Échauffement: convergence

Trois façons différentes pour montrer que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge:

1. Montrer que
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

2. Regrouper les termes afin de comparer $\zeta(2)$ à la série géométrique:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

3. Pour convaincre les plus sceptiques: prouver que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2.$$

Une preuve à la Euler

1. Écrire la série de Taylor de $\sin(x)$ autour de $x = 0$. En déduire un développement en série de $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

2. Traiter la fonction $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ comme une sorte de "polynôme de degré infini". Elle possède une infinité de zéros situés en $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ Dès lors, en violant une demi-douzaine de règles mathématiques, on a envie d'exprimer la fonction comme un produit infini:
$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{-1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{-2}\right)\cdots = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots$$

3. Comparer le coefficient du terme en x^2 de la série et du produit infini.

4. Réfléchir quels sont les problèmes dans cette preuve.

Séries de Fourier

1. Considérer la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Calculer sa série de Fourier et évaluer en $x = \pi$. Déduire
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. Considérer la fonction $f(x) = x^4$ sur l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$. Calculer sa série de Fourier et évaluer en $x = \pi$. Utiliser l'expression de $\zeta(2)$ pour déduire
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

3. Répéter l'argument pour $f(x) = x^{2p}$ et en déduire une formule récursive pour $\zeta(2p)$. Aide:
$$x^{2p} = \frac{\pi^{2p}}{2p+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,2p} \cos(nx)$$
et les coefficients de Fourier $a_{n,2p}$ sont respectivement $a_{n,0} = 0$ ou
$$a_{n,2p} = \frac{2p}{n^2} \pi^{2p-1} \cos(n\pi) - \frac{2p(2p-1)}{n^2} a_{n,2(p-1)}.$$

4. Considérer la fonction $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Calculer sa série de Fourier et évaluer en $x = 0$. Déduire
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$
et montrer que ceci est équivalent au problème de Bâle.

Et si on utilisait Parseval?

1. Appliquer l'identité de Parseval à la fonction $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$ et en déduire $\zeta(4)$.

2. Appliquer l'identité de Parseval à la fonction 2π-periodique impaire définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$ et en déduire
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

3. Quelle fonction choisir pour trouver $\zeta(2)$ avec l'identité de Parseval?

4. Remarquer que la même idée ne fonctionne pas pour trouver $\zeta(2n+1)$.

Une preuve un peu différente

Pour $n \geqslant 0$, considérer les expressions:

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{2n}\, dx \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\, (\cos(x))^{2n}\, dx.$$

1. Remarquer que $2\frac{B_0}{A_0} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Montrer par intégration par parties:

$$A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} \quad \text{et} \quad A_n = (2n-1)n\ B_{n-1} - 2n^2\ B_n.$$

3. Déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\frac{B_0}{A_0} - 2 \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{A_n}.$$

4. Borner B_n en fonction de A_n afin de montrer que le dernier terme tend vers zéro.

Pour aller plus loin

1. Montrer que, pour α non-entier, la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}\, e^{i\alpha(\pi - x)}$$

sur $[0, 2\pi]$ est donnée par

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n+\alpha}.$$

2. Utiliser l'identité de Parseval pour montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \alpha\pi)^2}.$$

3. Déduire l'expression pour $\zeta(2)$ du cas particulier $\alpha = \frac{1}{2}$.

4. Dériver deux fois en α, puis prendre la limite $\alpha \to 0$. Déduire l'expression pour $\zeta(4)$ et rester bouche bée!