

Physique Mathématique: Séance 5

La cave à vin de Fourier

Lorsqu'on compte construire une cave à vin, il est naturel de se demander quelle est la profondeur optimale pour conserver du vin. Tout connaisseur de vin sait que le vin se garde idéalement à température constante. Dès lors, nous voulons choisir la profondeur de la cave de façon à ce que les variations (journalières et annuelles) de température à la surface de la Terre affectent le moins possible la température dans la cave.

Dans une version simplifiée du problème nous pouvons supposer que la température $u(x, t)$ ne dépend que de la profondeur x , du temps t et de la diffusivité K du sol en question et qu'elle est gouvernée par l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{avec } x \geq 0 \text{ et } t \geq 0.$$

Supposons que la température à la surface de la Terre soit donnée par

$$u(0, t) = f(t)$$

où $f(t)$ est une fonction périodique de période D .

1. Déterminer la profondeur optimale si on ne tient en compte que les variations annuelles. Pour cela, nous allons supposer que

$$f(t) = A_0 \cos\left(\frac{2\pi}{D}t\right),$$

où D est le nombre de secondes dans une année et que la constante de diffusivité vaut $K = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.

2. Montrer que les variations journalières, modélisées à nouveau par

$$f(t) = A_0 \cos\left(\frac{2\pi}{D}t\right)$$

mais où cette fois-ci D est le nombre de secondes par jour, se sentent pas de façon significative à cette profondeur et que donc notre approche est assez raisonnable.