

Physique Mathématique: Séance 6

Équidistribution de Weyl

Version imprécise: Si x est un irrationnel alors, pour n assez grand, les parties fractionnaires

$$\langle x \rangle, \langle 2x \rangle, \langle 3x \rangle, \dots, \langle nx \rangle$$

sont plus ou moins équidistribuées sur l'intervalle unité.

Version précise: Si x est un irrationnel, alors pour tous $0 \leq a \leq b < 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq r < n \mid a \leq \langle rx \rangle \leq b\}}{n} = b - a. \quad (1)$$

Aide:

1. Soit x un irrationnel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue 2π -périodique. Définir

$$G_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n f(2\pi r x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f) = 0$ pour toute fonction f continue 2π -périodique.

2. Dédurre (1) en prenant une fonction f appropriée.

Pour aller plus loin: Caractériser les $x \in \mathbb{R}$ tel que les parties fractionnaires des puissances

$$\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle x^3 \rangle, \dots, \langle x^n \rangle$$

sont plus ou moins équidistribuées sur l'intervalle unité.