

## Physique Mathématique: Séance 7

### Inégalité de Poincaré

---

Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles  $2\pi$ -périodique et  $C^1$ . Supposons de plus que

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0,$$

c'est-à-dire  $f$  est de moyenne nulle. Alors

$$\int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx \geq \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx$$

avec égalité si et seulement si  $f(x) = A \sin(x + \varphi)$  pour un certain  $A \geq 0$  et un certain  $\varphi \in [0, 2\pi[$ .

### Convergence du flot de la chaleur

---

Si l'on applique le flot de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T$$

à une température initiale  $T_0$  sur le cercle unité  $S^1$ , alors la température  $T$  converge exponentiellement vite (en norme  $L^2$ ) vers la température moyenne  $\bar{T} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} T d\mu$ . Plus précisément,

$$\int_{S^1} (T - \bar{T})^2 d\mu \leq c_1 e^{-\frac{2t}{c_0}}$$

où  $c_0 > 0$  est la constante de Poincaré et  $c_1$  est une autre constante positive qui dépend de la température initiale  $T_0$ .

### Inégalité isopérimétrique

---

Soit  $\Gamma$  une courbe fermée simple de longueur  $L$  (suffisamment régulière) qui borde une région de surface  $A$ . Alors

$$L^2 \geq 4\pi A$$

avec égalité si et seulement si  $\Gamma$  est un cercle.