Titulaire: Christine De Mol Assistant: Patrick Weber

Physique Mathématique: Séance 8

Énergie d'une corde vibrante

Soit u l'élongation d'une corde vibrante satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec $c^2 = \frac{\tau}{\rho}$. Nous supposons que le bord est fixé, c'est-à-dire $u(0,t) = 0 = u(L,t)$ à tout instant t. Montrer que l'énergie totale de la corde

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{\tau}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

est une quantité conservée.

Unicité pour l'équation de la chaleur inhomogène

Considérer l'équation de la chaleur inhomogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad \text{pour } x \in [0,L] \text{ et } t > 0$$

avec la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$ pour tout $x \in [0,L]$ et les conditions de bord

$$u(0,t) = g(t) \qquad \text{et} \qquad u(L,t) = h(t).$$

Montrer que, si une telle solution u existe, alors elle est unique.

Aide: Supposer qu'il y ait deux solutions u et v, puis montrer que l'énergie

$$E(t) = \int_0^L (u-v)^2 \, dx$$

s'annule à tout instant t.