Titulaire: Christine De Mol | Assistant: Patrick Weber

Physique Mathématique: Séance 9

Instabilité de l'équation de la chaleur inverse

Considérer l'équation de la chaleur inverse

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pour $x \in [0, L]$ et $t \in (-\infty, 0]$. Supposons que les bords restent à température nulle:

$$u(0, t) = 0 = u(L, t)$$

à tout instant t. Montrer que les solutions de ce problème sont instables. On voudrait donc montrer que des petites perturbations de la solution initiale font exploser la différence entre les solutions correspondantes.

Régularisation de l'équation de la chaleur inverse

Montrer qu'on peut régulariser l'équation de la chaleur inverse sur $-T \leqslant t \leqslant 0$ en imposant que l'énergie au temps $-T$:

$$E(-T) = \int_0^L (u(x, -T))^2 \, dx$$

soit bornée par une constante M. Plus précisément, notons $f(x)$ la condition initiale de la solution $u(x, t)$ et $g(x)$ la condition initiale de la solution $v(x, t)$. Supposons que $g(x)$ est une petite perturbation de $f(x)$, c'est-à-dire que

$$\int_0^L (f(x) - g(x))^2 \, dx \leqslant \epsilon$$

et supposons que $E_u(-T)$ et $E_v(-T)$ soient bornées par M. Montrer qu'alors

$$\int_0^L (u(x, t) - v(x, t))^2 \, dx \leqslant \epsilon^{1+\frac{t}{T}} M^{-\frac{t}{T}}$$

pour tout instant $-T \leqslant t \leqslant 0$.

Aide:

1. Montrer que la fonction $\log E(t)$ est une fonction convexe en t.
2. Déduire que
$$E(t) \leqslant (E(0))^{1+\frac{t}{T}} (E(-T))^{-\frac{t}{T}}$$
3. Conclure!