chapitre 3

Algorithme du Simplexe

20 avril 2007

RAPPEL au TABLEAU :

- Algorithme du Simplexe

  TODO

  step 0 : *(Initialisation)*
  Soit B un ensemble d'indices de base initiale tel que la solution de base primale associée x_B est réalisable.
  Calculer $x_B = A_B^{-1}\, b$ et $y^T = c_B^T\, A_B^{-1}$.

  step 1 : *(Test d'Optimalité)*
  Calculer les coûts réduits $c_N^T - y^T\, A_N$.
  Si $c_N^T - y^T\, A_N \leqslant 0$ alors la solution courante est optimale.
  Sinon choisir $r \notin B$ tel que $c_r - y^T\, a_r > 0$.
  ($\rightarrow x_r$ entre en base)

  step 2 : *(Pivot)*
  Déterminer la variable qui sort de la base ($\rightarrow x_s$).
  S'il n'en existe aucune, alors le problème est non borné.
  Mettre à jour l'ensemble d'indices de bases B et déterminer les nouvelles solutions de base x^B et y^B.

- Règle de Bland
  - s'il y a deux ou plusieurs variables qui peuvent *entrer en base*, alors on choisit celle qui a le plus petit indice ;
  - s'il y a deux ou plusieurs variables qui peuvent *sortir de la base*, alors on choisit celle qui a le plus petit indice ;

Exemple :

$$
\begin{array}{llcrcl}
\max & x_1 & + & 2\,x_2 & & \\
\text{s.t. :} & x_1 & + & x_2 & \leqslant & 6 \\
 & & & x_2 & \leqslant & 3 \\
 & & & x_j & \geqslant & 0 \qquad \forall\, j = 1,2
\end{array}
$$

RAPPEL :

- Hypothèses initiales
  - PL de la forme suivante : $\max\{\, c^T x : A\,x = b, x \geqslant 0 \,\}$ (ou min)
  - s'il y a des inégalités, ajouter des variables d'écart
  - $b \geqslant 0$ (sinon multiplier une contrainte par -1)
  - A contient une matrice identité (sinon voir séance suivante)
- Algorithme du Simplexe

  step 0 : *(Initialisation)*
  Soit B un ensemble d'indices de base initiale tel que la solution de base primale associée x_B est réalisable.
  Calculer $x_B = A_B^{-1}\,b$ et $y^T = c_B^T\,A_B^{-1}$.

  step 1 : *(Test d'Optimalité)*
  Calculer les coûts réduits $c_N^T - y^T\,A_N$.
  Si $c_N^T - y^T\,A_N \leqslant 0$ alors la solution courante est optimale.
  Sinon choisir $r \notin B$ tel que $c_r - y^T\,a_r > 0$.
  ($\rightarrow x_r$ entre en base)

  step 2 : *(Pivot)*
  Déterminer la variable qui sort de la base ($\rightarrow x_s$).
  S'il n'en existe aucune, alors le problème est non borné.
  Mettre à jour l'ensemble d'indices de base B' et déterminer les nouvelles solutions de base x' et y'.
- En pratique ...
  - A chaque itération, on écrit le *dictionnaire* correspondant à la base B :

$$\begin{array}{rcccl} x_i & = & \bar{b}_i & + & \sum_{j\in N} \bar{a}_{ij}\,x_j \qquad \forall\, i \in B \\ \hline z & = & \bar{b}_0 & + & \sum_{j\in N} \bar{c}_j\,x_j \end{array}$$

$$\text{où :} \quad \bar{b}_i = \left(A_B^{-1}\,b\right)_i \qquad \bar{a}_{ij} = \left(-A_B^{-1}A_N\right)_{ij}$$
$$\bar{b}_0 = c_B^T\,A_B^{-1}\,b \qquad \bar{c}_j = \left(c_N^T - c_B^T\,A_B^{-1}\,A_N\right)_j$$

  - on choisit la variable x_r qui *entre* en base telle que $\bar{c}_r > 0$
  - on détermine la variable s qui *sort* de la base : $s = \arg\min\limits_{i:\bar{a}_{ir}<0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ir}}$
- Règle de Bland
  - s'il y a deux ou plusieurs variables qui peuvent *entrer en base*, alors on choisit celle qui a le plus petit indice ;
  - s'il y a deux ou plusieurs variables qui peuvent *sortir de la base*, alors on choisit celle qui a le plus petit indice ;

RAPPEL :

- Comment trouver une première solution de base réalisable ?

  On ajoute des variables artificielles s_i pour chaque contrainte i et on résout d'abord le problème de phase I :

$$
\begin{array}{llcccc}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} s_i & & & & \\
\text{s.t. :} & A\,x & + & s & = & b \\
 & x & & & \geqslant & 0 \\
 & & & s & \geqslant & 0
\end{array}
$$

  - si la solution optimale de ce problème est strictement positive, alors le problème initial est non réalisable
  - si la solution optimale de ce problème est égale à 0, alors toutes les variables artificielles sont hors base et on a trouvé une solution de base réalisable du problème initial ; on peut ensuite résoudre le problème initial (sans variables artificielles)

Exercice 3 . 1

On considère le polyèdre S de $\mathbb{R}^5$ défini par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 2, \\ 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 + 2\,x_5 = 3, \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

a. Le point $x^* = (1, 1, 1, 1, 0)$ est-il un point extrême ? Pourquoi ?

b. Trouver les vecteurs $u \in \mathbb{R}^5$ tels que $x^* \pm \varepsilon\, u \in S$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

c. Trouver tous les points $\bar{x} \in S$ de la forme $x^* \pm \varepsilon\, u$ qui ont au plus trois coordonnées non nulles. Ces points $\bar{x}$ sont-ils des points extrêmes ? dégénérés ?

Solution :

a. *On vérifie d'abord que x^* appartient bien à S.*

On a que x est un point extrême $\Leftrightarrow$ *x est un sommet*
$\Leftrightarrow$ *x vérifie 5 inégalités (lin. indép.) à l'égalité*
$\Leftrightarrow$ *au plus 3 coordonnées de x sont non nulles*

$\Rightarrow$ $x^* = (1, 1, 1, 1, 0)$ *n'est pas un point extrême (car il a 4 coord. non nulles)*

b. $x^* \pm \varepsilon\, u \in S$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+1+0 \pm \varepsilon \cdot (\; u_1 + u_3 + u_5 \;) = 2 \\ 2+1+1 \pm \varepsilon \cdot (\; 2\,u_2 + u_3 + u_4 \;) = 4 \\ 1+1+1+0 \pm \varepsilon \cdot (\; u_1 + u_2 + u_4 + 2\,u_5 \;) = 3 \\ 1 \pm \varepsilon \cdot (\; u_1 \;) \geqslant 0 \\ 1 \pm \varepsilon \cdot (\; u_2 \;) \geqslant 0 \\ 1 \pm \varepsilon \cdot (\; u_3 \;) \geqslant 0 \\ 1 \pm \varepsilon \cdot (\; u_4 \;) \geqslant 0 \\ 0 \pm \varepsilon \cdot (\; u_5 \;) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = 0 \\ 2\,u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_4 + 2\,u_5 = 0 \\ u_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_5 = 0 \\ u_3 = -\,u_1 \\ 2\,u_2 - u_1 + u_4 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u_5 &=& 0 \\ u_3 &=& -\ u_1 \\ u_4 &=& -\ u_1 - u_2 \\ 2\,u_2 - u_1 - u_1 - u_2 &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u_5 &=& 0 \\ u_3 &=& -\ u_1 \\ u_2 &=& 2\,u_1 \\ u_4 &=& -\ 3\,u_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad u \quad = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\,\alpha \\ -\ \alpha \\ -\,3\,\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

c. *On obtient les points $\bar{x}$ suivants :*

- $\alpha = -\,1 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$ ***pas bon*** *($\bar{x} \notin S$)*

- $\alpha = -\,\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \\ 0.5 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.5 \\ 2.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$ ***OK***

- $\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$ ***pas bon*** *($\bar{x} \notin S$)*

- $\alpha = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$ ***OK***

On obtient donc 2 points extrêmes qui sont tous les deux ***non dégénérés*** *(comme ils ont $m = 3$ ccoordonnées > 0)*

Exercice 3 . 2

Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : A\,x = b,\ x \geqslant 0\}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

a. Pour quelles valeurs de α, β, γ, le polyèdre S possède-t-il 4 sommets non dégénérées ?

b. Pour $b = (1, 1, 2)$ et $c = (1, 1, 1, 2)$, minimiser $c\,x$ sur S.

Solution :

Exercice 3 . 3

Soit le programme linéaire suivant :

$$\min \quad z = x_2 - 3\,x_3 + 2\,x_5$$

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
\text{s.t. :} & x_1 + 3\,x_2 & - \; x_3 & & + \; 2\,x_5 & & = & 7 \\
& - \; 2\,x_2 & + \; 4\,x_3 & + \; x_4 & & & = & 12 \\
& - \; 4\,x_2 & + \; 3\,x_3 & & + \; 8\,x_5 & + \; x_6 & = & 10 \\
& & & & & x_j & \geqslant & 0 \qquad \forall\, j = 1, \ldots, 6.
\end{array}$$

La solution optimale de ce problème est $x = (0, 4, 5, 0, 0, 11)$.

a. Donner l'ensemble des indices de base B associé à la solution optimale.

b. Quelle est la solution de base duale y associée à B ?

c. Prouver l'optimalité des solutions x et y.

d. Calculer les coûts réduits des variables primales hors base.

Solution :

a. $B = \{\,2, 3, 6\,\}$

b. *On prend* $y^T = c_B^T\, A_B^{-1}$:

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_B^{-1} = \frac{1}{\det(A_B)} \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{21} & c_{31} \\ -c_{12} & c_{22} & -c_{32} \\ c_{13} & -c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 10 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 1 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 1 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.2 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

c.
- *On vérifie bien que x est primal-réalisable* $\rightarrow$ ***OK***
- *Par construction on sait déjà que $c^T x = y^T b$.*
  En effet $c^T x = 4 - 15 = -11$

  $y^T b = -\frac{7}{5} - \frac{48}{5} = -\frac{55}{5} = -11 \quad \rightarrow$ ***OK***

- *Reste donc à vérifier que y est dual-réalisable :*
  Écrivons le dual :

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\max & z = & 7\,y_1 & + & 12\,y_2 & + & 10\,y_3 & & \\
\textit{s.t. :} & & y_1 & & & & & \leqslant & 0 \\
 & & 3\,y_1 & - & 2\,y_2 & - & 4\,y_3 & \leqslant & 1 \\
 & & -\,y_1 & + & 4\,y_2 & + & 3\,y_3 & \leqslant & -3 \\
 & & & & y_2 & & & \leqslant & 0 \\
 & & 2\,y_1 & & & + & 8\,y_3 & \leqslant & 2 \\
 & & & & & & y_3 & \leqslant & 0
\end{array}
$$

  $y = (-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, 0)$ *est bien dual-réalisable* $\rightarrow$ ***OK***

x et y sont donc bien les solutions optimales recherchées.

d. *Rappelons que les coûts réduits sont :* $\bar{c}_N^T = c_N^T - \underbrace{c_B^T\,A_B^{-1}}_{y^T}\,A_N$

On obtient donc :

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_N^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.2 & -0.8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.2 & -0.8 & -0.4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 2.4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Il est logique que tous les coûts réduits sont positifs, puisque x est une solution optimale ! (problème à minimum)

Exercice 3 . 4

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrl}
\max & z & = & 5\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & 3\,x_6 \\
\\
\text{s.t. :} & x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & & & & & + & x_6 & = & 5 \\
& & & 4\,x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & + & 2\,x_6 & = & 11 \\
& & & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & x_4 & & & + & 2\,x_6 & = & 8 \\
& & & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, 6
\end{array}
$$

Réponse : solution optimale $x^* = (\,0, 2, 0, 0, 1, 1\,)$ de valeur $z^* = 13$

Solution :

On voit qu'une première base est : $B = \{\,x_1, x_4, x_5\,\}$

Première solution de base réalisable :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & 5 & - & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & - & x_6 \\
x_4 & = & 8 & - & 3\,x_2 & - & 4\,x_3 & - & 2\,x_6 \\
x_5 & = & 11 & - & 4\,x_2 & - & x_3 & - & 2\,x_6 \\
\hline
z & = & 0 & + & 5\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & 3\,x_6
\end{array}
$$

Itération 1 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{1}{2}\,x_1 & - & \frac{3}{2}\,x_3 & - & \frac{1}{2}\,x_6 \\
x_4 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{3}{2}\,x_1 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & \frac{1}{2}\,x_6 \\
x_5 & = & 1 & + & 2\,x_1 & + & 5\,x_3 & & \\
\hline
z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{5}{2}\,x_1 & - & \frac{7}{2}\,x_3 & + & \frac{1}{2}\,x_6
\end{array}
$$

Itération 2 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 2 & - & 2\,x_1 & - & 2\,x_3 & + & x_4 \\
x_6 & = & 1 & + & 3\,x_1 & + & x_3 & - & 2\,x_4 \\
x_5 & = & 1 & + & 2\,x_1 & + & 5\,x_3 & & \\
\hline
z & = & 13 & - & x_1 & - & 3\,x_3 & - & x_4
\end{array}
$$

Tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls.

$\Rightarrow$ *solution optimale* $x^* = (\,0, 2, 0, 0, 1, 1\,)$ *de valeur* $z^* = 13$

Exercice 3 . 5

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = & 5\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & 3\,x_3 & & \\
\text{s.t. :} & & x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & \leqslant & 3 \\
& & -\,x_1 & & & + & 3\,x_3 & \leqslant & 2 \\
& & 2\,x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & \leqslant & 4 \\
& & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & \leqslant & 2 \\
& & & & & & x_j & \geqslant & 0 \qquad \forall\, j = 1, \ldots, 3
\end{array}$$

Réponse : solution optimale $x^* = (\,\frac{32}{29}, \frac{8}{29}, \frac{30}{29}\,)$ de valeur $z^* = 10$

Solution :

On ajoute les variables d'écart t_1, t_2, t_3 et t_4 afin d'obtenir le programme linéaire :

$$\begin{array}{llrcrcrcccccccl}
\max & z = & 5\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & 3\,x_3 & & & & & & & & \\
\text{s.t. :} & & x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & + & t_1 & & & & & = & 3 \\
& & -\,x_1 & & & + & 3\,x_3 & & & + & t_2 & & & = & 2 \\
& & 2\,x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & & & & & + & t_3 & = & 4 \\
& & 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & & & & & & + \; t_4 & = & 2 \\
& & & & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \qquad \forall\, j = 1, \ldots, 3 \\
& & & & & & & & & & & & t_i & \geqslant & 0 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 4
\end{array}$$

On voit qu'une première base est : $B = \{\, t_1, t_2, t_3, t_4\}$

Première solution de base réalisable :

$$\begin{array}{rclcrcrcr}
t_1 & = & 3 & - & x_1 & - & 3\,x_2 & - & x_3 \\
t_2 & = & 2 & + & x_1 & & & - & 3\,x_3 \\
t_3 & = & 4 & - & 2\,x_1 & + & x_2 & - & 2\,x_3 \\
t_4 & = & 2 & - & 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & x_3 \\
\hline
z & = & 0 & + & 5\,x_1 & + & 5\,x_2 & + & 3\,x_3
\end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{rclcrcrcr}
t_1 & = & 2 & - & \frac{3}{2}\,x_2 & - & \frac{3}{2}\,x_3 & + & \frac{1}{2}\,t_4 \\
t_2 & = & 3 & - & \frac{3}{2}\,x_2 & - & \frac{5}{2}\,x_3 & - & \frac{1}{2}\,t_4 \\
t_3 & = & 2 & + & 4\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & t_4 \\
x_1 & = & 1 & - & \frac{3}{2}\,x_2 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & \frac{1}{2}\,t_4 \\
\hline
z & = & 5 & - & \frac{5}{2}\,x_2 & + & \frac{11}{2}\,x_3 & - & \frac{5}{2}\,t_4
\end{array}$$

Itération 2 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
t_1 & = & 1 & - & \frac{7}{2}\,x_2 & + & \frac{1}{2}\,t_3 & & \\
t_2 & = & \frac{4}{3} & - & \frac{29}{6}\,x_2 & + & \frac{5}{6}\,t_3 & - & \frac{4}{3}\,t_4 \\
x_3 & = & \frac{2}{3} & + & \frac{4}{3}\,x_2 & - & \frac{1}{3}\,t_3 & + & \frac{1}{3}\,t_4 \\
x_1 & = & \frac{4}{3} & - & \frac{5}{6}\,x_2 & - & \frac{1}{6}\,t_3 & - & \frac{1}{3}\,t_4 \\
\hline
z & = & \frac{26}{3} & + & \frac{29}{6}\,x_2 & - & \frac{11}{6}\,t_3 & - & \frac{2}{3}\,t_4
\end{array}
$$

Itération 3 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
t_1 & = & \frac{1}{29} & + & \frac{21}{29}\,t_2 & - & \frac{3}{29}\,t_3 & + & \frac{28}{29}\,t_4 \\
x_2 & = & \frac{8}{29} & - & \frac{6}{29}\,t_2 & + & \frac{5}{29}\,t_3 & - & \frac{8}{29}\,t_4 \\
x_3 & = & \frac{30}{29} & - & \frac{8}{29}\,t_2 & - & \frac{3}{29}\,t_3 & - & \frac{1}{29}\,t_4 \\
x_1 & = & \frac{32}{29} & + & \frac{5}{29}\,t_2 & - & \frac{9}{29}\,t_3 & - & \frac{3}{29}\,t_4 \\
\hline
z & = & 10 & - & t_2 & - & t_3 & - & 2\,{}_4
\end{array}
$$

Tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls.

$\Rightarrow$ *solution optimale* $x^* = \left(\frac{32}{29}, \frac{8}{29}, \frac{30}{29} \right)$ *de valeur* $z^* = 10$

Exercice 3 . 6

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcr}
\min & z = & 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & - & 4\,x_3 & + & x_4 & & \\
\text{s.t. :} & & x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & - & 3\,x_4 & \geqslant & -2 \\
& & 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3\,x_4 & \leqslant & 8 \\
& & & - & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 6\,x_4 & \leqslant & 4 \\
& & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, 4
\end{array}$$

Réponse : solution optimale $x^* = (\,0, 2, 6, 0\,)$ de valeur $z^* = -\,30$

Solution :

On ajoute les variables d'écart t_1, t_2, t_3 afin d'obtenir le programme linéaire :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcrcl}
\min & z = & 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & - & 4\,x_3 & + & x_4 & & & & & & & & \\
\text{s.t. :} & & x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & - & 3\,x_4 & - & t_1 & & & & & = & -2 \\
& & 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3\,x_4 & & & + & t_2 & & & = & 8 \\
& & & - & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 6\,x_4 & & & & & + & t_3 & = & 4 \\
& & & & & & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, 4 \\
& & & & & & & & & & & & & & t_i & \geqslant & 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, 3
\end{array}$$

Le terme de droite de la première contrainte est négatif, multiplions cette contrainte par (-1) :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcrcl}
\min & z = & 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & - & 4\,x_3 & + & x_4 & & & & & & & & \\
\text{s.t. :} & & -\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & x_3 & + & 3\,x_4 & + & t_1 & & & & & = & 2 \\
& & 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3\,x_4 & & & + & t_2 & & & = & 8 \\
& & & - & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 6\,x_4 & & & & & + & t_3 & = & 4 \\
& & & & & & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, 4 \\
& & & & & & & & & & & & & & t_i & \geqslant & 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, 3
\end{array}$$

On voit qu'une première base est : $B = \{\,t_1, t_2, t_3\}$

Première solution de base réalisable :

$$\begin{array}{rclcrcrcrcr}
t_1 & = & 2 & + & x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & - & 3\,x_4 \\
\color{blue}{t_2} & = & 8 & - & 2\,x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3\,x_4 \\
t_3 & = & 4 & & & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & 6\,x_4 \\
\hline
z & = & 0 & + & 2\,x_1 & - & 3\,\color{red}{x_2} & - & 4\,x_3 & + & x_4
\end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
t_1 & = & 26 & - & 5\,x_1 & - & 4\,x_3 & - & 12\,x_4 & - & 3\,t_2 \\
x_2 & = & 8 & - & 2\,x_1 & - & x_3 & - & 3\,x_4 & - & t_2 \\
\color{blue}{t_3} & = & 36 & - & 8\,x_1 & - & 6\,x_3 & - & 18\,x_4 & - & 4\,t_2 \\
\hline
z & = & -\,24 & + & 8\,x_1 & - & \color{red}{x_3} & + & 10\,x_4 & + & 3\,t_2
\end{array}$$

Itération 2 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
t_1 & = & 2 & + & \frac{1}{3}\,x_1 & & & - & \frac{1}{3}\,t_2 & + & \frac{2}{3}\,t_3 \\
x_2 & = & 2 & - & \frac{2}{3}\,x_1 & & & - & \frac{1}{3}\,t_2 & + & \frac{1}{6}\,t_3 \\
x_3 & = & 6 & - & \frac{4}{3}\,x_1 & - & 3\,x_4 & - & \frac{2}{3}\,t_2 & - & \frac{1}{6}\,t_3 \\
\hline
z & = & -\,30 & + & \frac{28}{3}\,x_1 & + & 13\,x_4 & + & \frac{11}{3}\,t_2 & + & \frac{1}{6}\,t_3
\end{array}$$

Tous les coûts réduits sont positifs ou nuls.

$\Rightarrow$ *solution optimale* $x^* = (\,0, 2, 6, 0\,)$ *de valeur* $z^* = -\,30$

Exercice 3 . 7

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & z & = & x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 \\
\text{s.t. :} & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & \leqslant & 10 \\
 & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & \leqslant & 10 \\
 & x_1 & - & 3\,x_2 & + & x_3 & \leqslant & 10 \\
 & & & & & x_j & \geqslant & 0 \qquad \forall\, j = 1, \dots, 3
\end{array}$$

Solution :

On ajoute les variables d'écart t_1, t_2 et t_3 afin d'obtenir le programme linéaire :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & z = x_1 + 3\,x_2 - x_3 \\
\text{s.t. :} & 2\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 + t_1 & & & = & 10 \\
 & 3\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 & + t_2 & & = & 10 \\
 & x_1 - 3\,x_2 + x_3 & & + t_3 & = & 10 \\
 & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, 3 \\
 & & & t_i & \geqslant & 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, 3
\end{array}$$

On voit qu'une première base est : $B = \{\, t_1, t_2, t_3 \,\}$

Première solution de base réalisable :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
t_1 & = & 10 & - & 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 \\
t_2 & = & 10 & - & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 \\
t_3 & = & 10 & - & x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 \\
\hline
z & = & 0 & + & x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3
\end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
t_1 & = & \frac{10}{3} & - & \frac{10}{3}\,x_2 & + & \frac{5}{3}\,x_3 & + & \frac{2}{3}\,t_2 \\
x_1 & = & \frac{10}{3} & + & \frac{2}{3}\,x_2 & - & \frac{1}{3}\,x_3 & - & \frac{1}{3}\,t_2 \\
t_3 & = & \frac{20}{3} & + & \frac{7}{3}\,x_2 & - & \frac{2}{3}\,x_3 & + & \frac{1}{3}\,t_2 \\
\hline
z & = & \frac{10}{3} & + & \frac{11}{3}\,x_2 & - & \frac{4}{3}\,x_3 & - & \frac{1}{3}\,t_2
\end{array}$$

Itération 2 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 1 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & \frac{3}{10}\,t_1 & + & \frac{1}{5}\,t_2 \\
x_1 & = & 4 & & & - & \frac{1}{5}\,t_1 & - & \frac{1}{5}\,t_2 \\
t_3 & = & 9 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & \frac{7}{10}\,t_1 & + & \frac{4}{5}\,t_2 \\
\hline
z & = & 7 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & \frac{11}{10}\,t_1 & + & \frac{2}{5}\,t_2
\end{array}$$

La variable qui devrait entrer en base est x_3, mais on peut augmenter $x_3 \to \infty$ tout en restant réalisable.

$\Rightarrow$ *le problème est non borné*

En effet, on vérifie que :

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est réalisable pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Et la valeur de la fonction objective : $c^T x(\lambda) = 7 + \frac{1}{2} \cdot \lambda \quad \to \infty \quad$ *si* $\lambda \to \infty$

Donc $r = (0, \frac{1}{2}, 1)$ *est un rayon tel que* $c^T r > 0$ *!*

Exercice 3 . 8

Utiliser l'algorithme du simplexe pour trouver *tous* les sommets optimaux du problème suivant :

$$\begin{array}{llcl}
\max & z & = & 2\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 + 4\,x_4 \\
\text{s.t. :} & x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 & \leqslant & 5 \\
& x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 & \leqslant & 3 \\
& x_j & \geqslant & 0 \qquad \forall\, j = 1, \ldots, 4
\end{array}$$

Réponse : 3 sommets optimaux : $x^{*1} = (\,1, 2, 0, 0\,)$ de valeur $z^* = 8$
$x^{*2} = (\,0, \frac{12}{5}, 0, \frac{1}{5}\,)$
$x^{*3} = (\,0, 1, 1, 0\,)$

Solution :

On ajoute les variables d'écart t_1 et t_2 afin d'obtenir le programme linéaire :

$$\begin{array}{llcl}
\max & z & = & 2\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 + 4\,x_4 \\
\text{s.t. :} & x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 + t_1 & = & 5 \\
& x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 + t_2 & = & 3 \\
& x_j & \geqslant & 0 \qquad \forall\, j = 1, \ldots, 4 \\
& t_i & \geqslant & 0 \qquad \forall\, i = 1, 2
\end{array}$$

On voit qu'une première base est : $B = \{\,t_1, t_2\,\}$

Première solution de base réalisable :

$$\begin{array}{rcl}
t_1 & = & 5 - x_1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 - x_4 \\
t_2 & = & 3 - x_1 - x_2 - 2\,x_3 - 3\,x_4 \\
\hline
z & = & 0 + 2\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 + 4\,x_4
\end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{rcl}
t_1 & = & 2 - x_2 - x_3 + 2\,x_4 + t_2 \\
x_1 & = & 3 - x_2 - 2\,x_3 - 3\,x_4 - t_2 \\
\hline
z & = & 6 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 - 2\,t_2
\end{array}$$

Itération 2 :

$$\begin{array}{rcl}
x_2 & = & 2 - x_3 + 2\,x_4 - t_1 + t_2 \\
x_1 & = & 1 - x_3 - 5\,x_4 + t_1 - 2\,t_2 \\
\hline
z & = & 8 - t_1 - t_2
\end{array}$$

Tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls.

$$\Rightarrow \quad \textit{solution optimale } x_1^* = (1, 2, 0, 0) \quad \textit{de valeur } z^* = 8$$

Comment trouver tous les sommets optimaux ?

Vu le dernier tableau de l'algorithme du simplexe, on sait que dans toute solution optimale, on a que $t_1 = t_2 = 0$ *(pourquoi ?)*

Et pour une telle solution optimale, le reste du tableau nous dit que :

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 - 5\,x_4 \\ x_2 = 2 - x_3 + 2\,x_4 \end{cases} \tag{8.1}$$

Donc toutes les solutions optimales s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 - 5\,x_4 \geqslant 0 \\ x_2 = 2 - x_3 + 2\,x_4 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0 \\ x_4 \geqslant 0 \\ t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

On sait aussi que tout sommet possède 4 coordonnées nulles (pourquoi ?)

Donc afin de trouver tous les sommets optimaux, nous générons tous les points qui vérifient (**??**) *et qui ont au plus 2 coordonnées non nulles. Alors les points obtenus ainsi, qui, de plus, ont toutes les coordonnées positives ou nulles, sont les sommets optimaux recherchés.*

Pour notre exercice, on obtient les points suivants :

$(\ 1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ )$	***OK***
$(\ 0,\ 0,\ \frac{12}{7},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ 0\ )$	***non réalisable***
$(\ 0,\ \frac{12}{5},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ 0\ )$	***OK***
$(\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\ )$	***OK***
$(\ 6,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0\ )$	***non réalisable***
$(\ -1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0\ )$	***non réalisable***

Finalement on a 3 sommets optimaux :

$$\begin{cases} x^{*_1} = (1, 2, 0, 0) \\ x^{*_2} = (0, \frac{12}{5}, 0, \frac{1}{5}) \\ x^{*_3} = (0, 1, 1, 0) \end{cases}$$

Exercice 3 . 9

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe (résoudre d'abord le problème de phase I) :

$$\begin{array}{llcl}
\max & z & = & 3\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \\[1ex]
\text{s.t. :} & x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 & = & 4 \\
& 2\,x_1 + 3\,x_3 - 2\,x_4 + x_5 & = & 5 \\
& 2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 - x_5 + 2\,x_6 & = & 7 \\
& x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, 6
\end{array}$$

Réponse : solution optimale $x^* = (\,\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}\,)$ de valeur $z^* = \frac{43}{4}$

Solution :

On ajoute les variables artificielles s_1, s_2, s_3 et on résout le problème de phase I :

$$\begin{array}{llcl}
\min & w & = & s_1 + s_2 + s_3 \\[1ex]
\text{s.t. :} & x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 + s_1 & = & 4 \\
& 2\,x_1 + 3\,x_3 - 2\,x_4 + x_5 + s_2 & = & 5 \\
& 2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 - x_5 + 2\,x_6 + s_3 & = & 7 \\
& x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, 6 \\
& s_i & \geqslant & 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, 3
\end{array}$$

On a maintenant une première base : $B = \{\, s_1, s_2, s_3 \,\}$

Première solution de base réalisable :

$$\begin{array}{lcl}
s_1 & = & 4 - x_1 - x_2 - 2\,x_3 - x_4 \\
s_2 & = & 5 - 2\,x_1 - 3\,x_3 + 2\,x_4 - x_5 \\
s_3 & = & 7 - 2\,x_1 - x_2 - 3\,x_3 + x_5 - 2\,x_6 \\ \hline
w & = & 16 - 5\,x_1 - 2\,x_2 - 8\,x_3 + x_4 - 2\,x_6
\end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{lcl}
s_1 & = & \frac{3}{2} - x_2 - \frac{1}{2}\,x_3 - 2\,x_4 + \frac{1}{2}\,x_5 + \frac{1}{2}\,s_2 \\
x_1 & = & \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\,x_3 + x_4 - \frac{1}{2}\,x_5 - \frac{1}{2}\,s_2 \\
s_3 & = & 2 - x_2 - 2\,x_4 + 2\,x_5 - 2\,x_6 + s_2 \\ \hline
w & = & \frac{7}{2} - 2\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_3 - 4\,x_4 + \frac{5}{2}\,x_5 - 2\,x_6 + \frac{5}{2}\,s_2
\end{array}$$

Itération 2 :

$$\begin{array}{lcl}
x_2 & = & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,x_3 - 2\,x_4 + \frac{1}{2}\,x_5 - s_1 + \frac{1}{2}\,s_2 \\
x_1 & = & \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\,x_3 + x_4 - \frac{1}{2}\,x_5 - \frac{1}{2}\,s_2 \\
s_3 & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{3}{2}\,x_5 - 2\,x_6 + s_1 + \frac{1}{2}\,s_2 \\ \hline
w & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{3}{2}\,x_5 - 2\,x_6 + 2\,s_1 + \frac{3}{2}\,s_2
\end{array}$$

Itération 3 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
x_2 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{1}{2}\,x_3 & - & 2\,x_4 & + & \frac{1}{2}\,x_5 & - & s_1 & + & \frac{1}{2}\,s_2 & & \\
x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}\,x_3 & + & x_4 & - & \frac{1}{2}\,x_5 & & & - & \frac{1}{2}\,s_2 & & \\
x_6 & = & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4}\,x_3 & & & + & \frac{3}{4}\,x_5 & + & \frac{1}{2}\,s_1 & + & \frac{1}{4}\,s_2 & - & \frac{1}{2}\,s_3 \\
\hline
w & = & 0 & & & & & & & + & s_1 & + & s_2 & + & s_3
\end{array}
$$

On a trouvé une solution optimale du problème de phase I, passons à la phase II.

On connaît maintenant une première base réalisable du problème initial (sans les s) :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{1}{2}\,x_3 & - & 2\,x_4 & + & \frac{1}{2}\,x_5 \\
x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}\,x_3 & + & x_4 & - & \frac{1}{2}\,x_5 \\
x_6 & = & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4}\,x_3 & & & + & \frac{3}{4}\,x_5 \\
\hline
z & = & \frac{43}{4} & - & \frac{5}{4}\,x_3 & & & - & \frac{3}{4}\,x_5
\end{array}
$$

Tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls.

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x^{*1} = \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, 0, 0, 0, \tfrac{1}{4}\right)} \text{ est une solution optimale}$$

Remarque : *le sommet* $\boldsymbol{x^{*2} = \left(\tfrac{13}{4}, 0, 0, \tfrac{3}{4}, 0, \tfrac{1}{4}\right)}$ *est aussi optimal, ainsi que le segment qui relie ces 2 sommets.*

Exercice 3 . 10

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\min & z = 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & & \\
\text{s.t. :} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\
& 2x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 7 \\
& x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & & & + & 2x_5 & = & 19 \\
& & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, 5
\end{array}$$

Réponse : solution optimale $x^* = (\,0, \frac{9}{10}, 0, \frac{1}{10}, \frac{68}{10}\,)$ de valeur $z^* = \frac{19}{10}$

Solution :

On ajoute les variables artificielles s_1, s_2, s_3 et on résout le problème de phase I :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & w = s_1 & + & s_2 & + & s_3 & & & & & & & & \\
\text{s.t. :} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & + & s_1 & = & 1 \\
& 2x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & s_2 & = & 7 \\
& x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & & & + & 2x_5 & + & s_3 & = & 19 \\
& & & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, 5 \\
& & & & & & & & & & & s_i & \geqslant & 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, 3
\end{array}$$

On a maintenant une première base : $B = \{\, s_1, s_2, s_3 \,\}$

Première solution de base réalisable :

$$\begin{array}{rclcrcrcrcrcr}
\color{blue}{s_1} & = & 1 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & \\
s_2 & = & 7 & - & 2x_1 & & & - & 4x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 \\
s_3 & = & 19 & - & x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & & & - & 2x_5 \\
\hline
w & = & 27 & - & 4\color{red}{x_1} & - & 7x_2 & - & 4x_3 & - & 3x_4 & - & 3x_5
\end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{rclcrcrcrcrcr}
\color{blue}{x_1} & = & 1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & - & s_1 \\
s_2 & = & 5 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & & & - & x_5 & + & 2s_1 \\
s_3 & = & 18 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & + & s_1 \\
\hline
w & = & 23 & - & 3\color{red}{x_2} & - & 8x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & + & 4s_1
\end{array}$$

Itération 2 :

$$\begin{array}{rclcrcrcrcrcr}
x_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_3 & - & x_4 & & & - & s_1 \\
\color{blue}{s_2} & = & 7 & - & 2x_1 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & & \\
s_3 & = & 13 & + & 5x_1 & - & 7x_3 & + & 6x_4 & - & 2x_5 & + & 6s_1 \\
\hline
w & = & 20 & + & 3x_1 & - & 11\color{red}{x_3} & + & 4x_4 & - & 3x_5 & + & 7s_1
\end{array}$$

Itération 3 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_2 & = & \frac{11}{4} & - & \frac{3}{2}\,x_1 & - & \frac{3}{2}\,x_4 & - & \frac{1}{4}\,x_5 & - & s_1 & - & \frac{1}{4}\,s_2 \\
x_3 & = & \frac{7}{4} & - & \frac{1}{2}\,x_1 & - & \frac{1}{2}\,x_4 & - & \frac{1}{4}\,x_5 & & & - & \frac{1}{4}\,s_2 \\
\color{blue}{s_3} & = & \frac{3}{4} & + & \frac{17}{2}\,x_1 & + & \frac{19}{2}\,x_4 & - & \frac{1}{4}\,x_5 & + & 6\,s_1 & + & \frac{7}{4}\,s_2 \\
\hline
w & = & \frac{3}{4} & + & \frac{17}{2}\,x_1 & + & \frac{19}{2}\,x_4 & - & \frac{1}{4}\,\color{red}{x_5} & + & 7\,s_1 & + & \frac{11}{4}\,s_2
\end{array}
$$

Itération 4 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_2 & = & 2 & - & 10\,x_1 & - & 11\,x_4 & - & 7\,s_1 & - & 2\,s_2 & + & s_3 \\
x_3 & = & 1 & - & 9\,x_1 & - & 10\,x_4 & - & 6\,s_1 & - & 2\,s_2 & + & s_3 \\
x_5 & = & 3 & + & 34\,x_1 & + & 38\,x_4 & + & 24\,s_1 & + & 7\,s_2 & - & 4\,s_3 \\
\hline
w & = & 0 & & & & & + & s_1 & + & s_2 & + & s_3
\end{array}
$$

On a trouvé une solution optimale du problème de phase I, passons à la phase II.

On connaît maintenant une première base réalisable du problème initial (sans les s) :

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & 2 & - & 10\,x_1 & - & 11\,x_4 \\
\color{blue}{x_3} & = & 1 & - & 9\,x_1 & - & 10\,x_4 \\
x_5 & = & 3 & + & 34\,x_1 & + & 38\,x_4 \\
\hline
z & = & 2 & & & - & \color{red}{x_4}
\end{array}
$$

Iteration 1 :

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & \frac{9}{10} & - & \frac{1}{10}\,x_1 & + & \frac{11}{10}\,x_3 \\
x_4 & = & \frac{1}{10} & - & \frac{9}{10}\,x_1 & - & \frac{1}{10}\,x_3 \\
x_5 & = & \frac{68}{10} & - & \frac{2}{10}\,x_1 & - & \frac{38}{10}\,x_4 \\
\hline
z & = & \frac{19}{10} & + & \frac{9}{10}\,x_1 & + & \frac{1}{10}\,x_4
\end{array}
$$

Tous les coûts réduits sont positifs ou nuls.

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x^* = \left(0, \frac{9}{10}, 0, \frac{1}{10}, \frac{68}{10}\right)} \text{ est une solution optimale}$$

Exercice 3 . 11

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcl}
\min & z = & 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & & \\
\text{s.t. :} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\
 & & -2\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\
 & & & & 3\,x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 9 \\
 & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, 4
\end{array}
$$

Réponse : solution optimale $x^* = (\,0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0\,)$ de valeur $z^* = -8$

Solution :

On ajoute les variables artificielles s_1, s_2, s_3 et on résout le problème de phase I :

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcrcl}
\min & w = & s_1 & + & s_2 & + & s_3 & & & & & & & & & & \\
\text{s.t. :} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & s_1 & & & & & = & 4 \\
 & & -2\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & + & s_2 & & & = & 1 \\
 & & & & 3\,x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & + & s_3 & = & 9 \\
 & & & & & & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, 4 \\
 & & & & & & & & & & & & & & s_i & \geqslant & 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, 3
\end{array}
$$

On a maintenant une première base : $B = \{\, s_1, s_2, s_3 \,\}$

Première solution de base réalisable :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
s_1 & = & 4 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 \\
{\color{blue}s_2} & = & 1 & + & 2\,x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
s_3 & = & 9 & & & - & 3\,x_2 & - & x_3 & - & x_4 \\
\hline
w & = & 14 & + & x_1 & - & 5\,{\color{red}x_2} & - & x_3 & - & 2\,x_4
\end{array}
$$

Itération 1 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
{\color{blue}s_1} & = & 3 & - & 3\,x_1 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & s_2 \\
x_2 & = & 1 & + & 2\,x_1 & + & x_3 & & & - & s_2 \\
s_3 & = & 6 & - & 6\,x_1 & - & 4\,x_3 & - & x_4 & + & 3\,s_2 \\
\hline
w & = & 9 & - & 9\,{\color{red}x_1} & - & 6\,x_3 & - & 2\,x_4 & + & 5\,s_2
\end{array}
$$

Itération 2 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_2 & = & 3 & - & \frac{1}{3}\,x_3 & - & \frac{2}{3}x_4 & - & \frac{2}{3}\,s_1 & - & \frac{1}{3}\,s_2 \\
x_1 & = & 1 & - & \frac{2}{3}\,x_3 & - & \frac{1}{3}\,x_4 & - & \frac{1}{3}\,s_1 & + & \frac{1}{3}\,s_2 \\
s_3 & = & & & & + & x_4 & + & 2\,s_1 & + & s_2 \\
\hline
w & = & 0 & & & + & x_4 & + & 3\,s_1 & + & 2\,s_2
\end{array}
$$

On a trouvé une solution optimale au problème de phase I, mais il reste toujours une variable artificielle en base, i.e. s_3 !

On essaie de pivoter pour faire sortir des variables artificielles de la base et de les remplacer par des variables « normales ». On n'a plus besoin de tenir compte de la fonction objective.

Pour notre exercice, on va faire s_3 sortir de la base et x_4 entrer en base :

Itération 3 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_2 & = & 3 & - & \frac{1}{3}x_3 & + & \frac{2}{3}s_1 & + & \frac{1}{3}s_2 & - & \frac{2}{3}s_3 \\ x_1 & = & 1 & - & \frac{2}{3}x_3 & + & \frac{1}{3}s_1 & + & \frac{2}{3}s_2 & - & \frac{1}{3}s_3 \\ x_4 & = & & & & - & 2\,s_1 & - & s_2 & + & s_3 \end{array}$$

On a trouvé une solution réalisable du problème de phase I où toutes les variables artificielles sont hors base. On peut passer à la phase II.

On connaît maintenant une première base réalisable du problème initial (sans les s) :

$$\begin{array}{rcrcr} x_2 & = & 3 & - & \frac{1}{3}x_3 \\ x_1 & = & 1 & - & \frac{2}{3}x_3 \\ x_4 & = & 0 & & \\ \hline z & = & -\,4 & - & \frac{8}{3}x_3 \end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{rcrcr} x_2 & = & \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}x_1 \\ x_3 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{3}{2}x_1 \\ x_4 & = & 0 & & \\ \hline z & = & -\,8 & + & 4\,x_1 \end{array}$$

Tous les coûts réduits sont positifs ou nuls.

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x^* = \left(0, \tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, 0\right)} \text{ est une solution optimale}$$

Exercice 3 . 12

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & z = & 10\,x_1 & - & 57\,x_2 & - & 9\,x_3 & - & 24\,x_4 & & & & & & & \\
\text{s.t. :} & & \frac{1}{2}\,x_1 & - & \frac{11}{2}\,x_2 & - & \frac{5}{2}\,x_3 & + & 9\,x_4 & + & x_5 & & & & & = 0 \\
& & \frac{1}{2}\,x_1 & - & \frac{3}{2}\,x_2 & - & \frac{1}{2}\,x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & & & = 0 \\
& & x_1 & & & & & & & & & & & + & x_7 & = 1 \\
& & & & & & & & & & & & & & x_j & \geqslant 0 \quad \forall\, j = 1,\ldots,7
\end{array}$$

a. Utiliser la stratégie suivante :

- s'il y a deux ou plusieurs variables qui peuvent entrer en base, alors on choisit celle qui a le plus grand coût réduit (en valeur absolue) ;
- s'il y a deux ou plusieurs variables qui peuvent sortir de la base, alors on choisit celle qui a le plus petit indice ;

b. Utiliser les règles de Bland.

Remarque : vous pouvez commencer à partir de la base $B = \{\, x_5, x_6, x_7 \,\}$

Réponse : solution optimale $x^* = (\,1, 0, 1, 0, 2, 0, 0\,)$ de valeur $z^* = 1$

Solution :

a. *Prenons donc $B = \{\, x_5, x_6, x_7 \,\}$ comme première base :*

$$\begin{array}{rcrrrcrcrcr}
x_5 & = & & - & \frac{1}{2}\,x_1 & + & \frac{11}{2}\,x_2 & + & \frac{5}{2}\,x_3 & - & 9\,x_4 \\
x_6 & = & & - & \frac{1}{2}\,x_1 & + & \frac{3}{2}\,x_2 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & x_4 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\
\hline
z & = & & & 10\,x_1 & - & 57\,x_2 & - & 9\,x_3 & - & 24\,x_4
\end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{rcrrrcrcrcr}
x_1 & = & & & 11\,x_2 & + & 5\,x_3 & - & 18\,x_4 & - & 2\,x_5 \\
x_6 & = & & - & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & 8\,x_4 & + & x_5 \\
x_7 & = & 1 & - & 11\,x_2 & - & 5\,x_3 & + & 18\,x_4 & + & 2\,x_5 \\
\hline
z & = & & & 53\,x_2 & + & 41\,x_3 & - & 204\,x_4 & - & 20\,x_5
\end{array}$$

Itération 2 :

$$\begin{array}{rcrrrcrcrcr}
x_1 & = & & - & \frac{1}{2}\,x_3 & + & 4\,x_4 & + & \frac{3}{4}\,x_5 & - & \frac{11}{4}\,x_6 \\
x_2 & = & & - & \frac{1}{2}\,x_3 & + & 2\,x_4 & + & \frac{1}{4}\,x_5 & - & \frac{1}{4}\,x_6 \\
x_7 & = & 1 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & 4\,x_4 & - & \frac{3}{4}\,x_5 & + & \frac{11}{4}\,x_6 \\
\hline
z & = & & & \frac{29}{2}\,x_3 & - & 98\,x_4 & - & \frac{27}{4}\,x_5 & - & \frac{53}{4}\,x_6
\end{array}$$

Itération 3 :

$$\begin{array}{rcl}
x_3 & = & - 2x_1 + 8x_4 + \frac{3}{2}x_5 - \frac{11}{2}x_6 \\
x_2 & = & x_1 - 2x_4 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{5}{2}x_6 \\
x_7 & = & 1 - x_1 \\
\hline
z & = & - 29x_1 + 18x_4 + 15x_5 - 93x_6
\end{array}$$

Itération 4 :

$$\begin{array}{rcl}
x_3 & = & 2x_1 - 4x_2 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{9}{2}x_6 \\
x_4 & = & \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{5}{4}x_6 \\
x_7 & = & 1 - x_1 \\
\hline
z & = & - 20x_1 - 9x_2 + \frac{21}{2}x_5 - \frac{141}{2}x_6
\end{array}$$

Itération 5 :

$$\begin{array}{rcl}
x_5 & = & 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 9x_6 \\
x_4 & = & - \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_6 \\
x_7 & = & 1 - x_1 \\
\hline
z & = & 22x_1 - 93x_2 - 21x_3 + 24x_6
\end{array}$$

Itération 6 :

$$\begin{array}{rcl}
x_5 & = & - \frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 - 9x_4 \\
x_6 & = & - \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 \\
x_7 & = & 1 - x_1 \\
\hline
z & = & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4
\end{array}$$

$$\vdots$$

On voit que le dernier tableau est identique au tableau initial. Après 6 itérations du simplexe, on est revenu au point de départ, l'algorithme cycle !

On en conclut que la stratégie utilisée ne fonctionne pas toujours.

b. *Regardons ce qui se passe si on utilise les règles de Bland.*

En appliquant les règles de Bland, on voit que les 5 premières itérations sont identiques à celles utilisant la stratégie précédente. Reprenons donc le tableau obtenu après 5 itérations.

Itération 5 :

$$\begin{array}{rcl}
x_5 & = & 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 9x_6 \\
x_4 & = & - \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_6 \\
x_7 & = & 1 - x_1 \\
\hline
z & = & 22x_1 - 93x_2 - 21x_3 + 24x_6
\end{array}$$

Itération 6 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_5 & = & & & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & - & 8\,x_4 & + & x_6 \\
x_1 & = & & & 3\,x_2 & + & x_3 & - & 2\,x_4 & - & 2\,x_6 \\
\color{blue}{x_7} & = & 1 & - & 3\,x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & + & 2\,x_6 \\
\hline
z & = & & - & 27\,x_2 & + & \color{red}{x_3} & - & 44\,x_4 & - & 20\,x_6
\end{array}$$

Itération 7 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_5 & = & 2 & - & 2\,x_2 & - & 4\,x_4 & + & 5\,x_6 & - & 2\,x_7 \\
x_1 & = & 1 & & & & & & & - & x_7 \\
x_3 & = & 1 & - & 3\,x_2 & + & 2\,x_4 & + & 2\,x_6 & - & x_7 \\
\hline
z & = & 1 & - & 30\,x_2 & - & 42\,x_4 & - & 18\,x_6 & - & x_7
\end{array}$$

Tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls.

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x^* = (\,1, 0, 1, 0, 2, 0, 0\,)}$ *est une solution optimale*

Exercice 3 . 13

Résoudre le problème linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{llllllllllll} \min & z & = & 2\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & + & 4\,x_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrl} \text{s.t. :} & 4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 13\,x_3 & + & 3\,x_4 & + & x_5 & = & 17 & \\ & x_1 & + & x_2 & + & 5\,x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 7 & \\ & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 & \forall\, j = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

Solution :

FIXME : TODO !!!!!!!

On ajoute les variables d'écart t_1, t_2 et t_3 afin d'obtenir le programme linéaire :

$$\max \quad z = x_1 + 3\,x_2 - x_3$$

$$\begin{array}{lrcrcrcccrcrl} scq & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & + & t_1 & & & = & 10 & \\ & 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & & & + \; t_2 & & = & 10 & \\ & x_1 & - & 3\,x_2 & + & x_3 & & & & + \; t_3 & = & 10 & \\ & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 & \forall\, j \\ & & & & & & & & & t_i & \geqslant & 0 & \forall\, i \end{array}$$

On voit qu'une première base est : $B = \{\, t_1, t_2, t_3 \,\}$

Première solution de base réalisable :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} t_1 & = & 10 & - & 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 \\ t_2 & = & 10 & - & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 \\ t_3 & = & 10 & - & x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 \\ \hline z & = & 0 & + & x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 \end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} t_1 & = & \frac{10}{3} & - & \frac{10}{3}\,x_2 & + & \frac{5}{3}\,x_3 & + & \frac{2}{3}\,t_2 \\ x_1 & = & \frac{10}{3} & + & \frac{2}{3}\,x_2 & - & \frac{1}{3}\,x_3 & - & \frac{1}{3}\,t_2 \\ t_3 & = & \frac{20}{3} & + & \frac{7}{3}\,x_2 & - & \frac{2}{3}\,x_3 & + & \frac{1}{3}\,t_2 \\ \hline z & = & \frac{10}{3} & + & \frac{11}{3}\,x_2 & - & \frac{4}{3}\,x_3 & - & \frac{1}{3}\,t_2 \end{array}$$

Itération 2 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_2 & = & 1 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & \frac{3}{10}\,t_1 & + & \frac{1}{5}\,t_2 \\ x_1 & = & 4 & & & - & \frac{1}{5}\,t_1 & - & \frac{1}{5}\,t_2 \\ t_3 & = & 9 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & \frac{7}{10}\,t_1 & + & \frac{4}{5}\,t_2 \\ \hline z & = & 7 & + & \frac{1}{2}\,x_3 & - & \frac{11}{10}\,t_1 & + & \frac{2}{5}\,t_2 \end{array}$$

La variable qui devrait entrer en base est x_3, mais on peut augmenter $x_3 \to \infty$ tout en restant réalisable.

$\Rightarrow$ *le problème est non borné*

En effet, on vérifie que :

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est réalisable pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Et la valeur de la fonction objective : $c^T x(\lambda) = 7 + \frac{1}{2} \cdot \lambda \quad \to \infty \quad$ *si* $\lambda \to \infty$

Donc $r = (0, \frac{1}{2}, 1)$ *est un rayon tel que* $c^T r > 0$ *!*

Exercice 3 . 14

Résoudre le problème linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & z & = & 3\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 2\,x_5
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrl}
\text{s.t. :} & -2\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 2\,x_4 & & & = & 0 \\
 & -2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & & & = & 4 \\
 & 4\,x_1 & - & 4\,x_2 & & & - & 2\,x_4 & - & x_5 & = & 4 \\
 & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1,\ldots,5
\end{array}$$

Solution :

On ajoute deux variables artificielles s_1 et s_3 et on résout le problème de phase I :

$$\min \quad w = s_1 + s_3$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\text{s.t. :} & -2\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 2\,x_4 & & & + & s_1 & & & = & 0 \\
 & -2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & & & & & & & = & 4 \\
 & 4\,x_1 & - & 4\,x_2 & & & - & 2\,x_4 & - & x_5 & & & + & s_3 & = & 4 \\
 & & & & & & & & & & & & & x_j & \geqslant & 0 \quad \forall\, j = 1,\ldots,5 \\
 & & & & & & & & & & & & & s_i & \geqslant & 0 \quad \forall\, i = 1,3
\end{array}$$

On voit qu'une première base est : $B = \{\, s_1, x_3, s_3 \,\}$.
Première solution de base réalisable :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
s_1 & = & 0 & + & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_4 & & \\
x_3 & = & 4 & + & 2\,x_1 & - & 2\,x_2 & - & 2\,x_4 & & \\
{\color{blue}s_3} & = & 4 & - & 4\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_4 & + & x_5 \\
\hline
w & = & 4 & - & 2\,{\color{red}x_1} & + & 6\,x_2 & + & 4\,x_4 & + & x_5
\end{array}$$

Itération 1 :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
s_1 & = & 2 & + & 4\,x_2 & + & 3\,x_4 & + & \frac{1}{2}\,x_5 & - & \frac{1}{2}\,s_3 \\
x_3 & = & 6 & & & - & x_4 & + & \frac{1}{2}\,x_5 & - & \frac{1}{2}\,s_3 \\
x_1 & = & 1 & + & x_2 & + & \frac{1}{2}\,x_4 & + & \frac{1}{4}\,x_5 & - & \frac{1}{4}\,s_3 \\
\hline
w & = & 2 & + & 4\,x_2 & + & 3\,x_4 & + & \frac{1}{2}\,x_5 & + & \frac{1}{2}\,s_3
\end{array}$$

Il n'y a plus de variable susceptible d'entrer en base, et il existe toujours des variables artificielles strictement positives. Le problème initial est donc non réalisable.